ЛЕКЦИЯ 5

ЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАБОТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

1 Логические переменные и логические операции
2 Основные законы алгебры логики и правила преобразования логических выражений
3 Логические функции и таблицы истинности
4 Логические элементы и синтез логических схем

1 Логические переменные и логические операции

Информация (данные, машинные команды и т. д.) в компьютере представлена в двоичной системе счисления, в которой используется две цифры – 0 и 1. Электрический сигнал, проходящий по электронным схемам и соединительным проводникам (шинам) компьютера, может принимать значения 1 (высокий уровень электрического напряжения) и 0 (низкий уровень электрического напряжения) и рассматривается как импульсный сигнал, который математически может быть описан в виде двоичной переменной, принимающей также значения 0 или 1. Для решения различных логических задач, например, связанных с анализом и синтезом цифровых схем и электронных блоков компьютера, широко используются логические функции и логические операции с двоичными переменными, которые называются также логическими переменными.

Логические переменные изучаются в специальном разделе математики, который носит название алгебры логики (высказываний), или булевой алгебры. Булева алгебра названа по имени английского математика Джорджа Буля (1815–1864), внесшего значительный вклад в разработку алгебры логики. Предметом изучения алгебры логики являются высказывания, при этом анализу подвергается истинность или ложность высказываний, а не их смысловое содержание. Простые высказывания в алгебре логики обозначаются заглавными латинскими буквами: *A, B, C, D,…* и т. д. Составные высказывания на естественном языке образуются с помощью союзов. В алгебре логики эти союзы заменяются логическими операциями. В соответствии с алгеброй логики любое составное высказывание можно рассматривать как логическую функцию *F(A, B, C, …)*, аргументами которой являются логические переменные *A, B, C*... (простые высказывания). Логические функции и логические переменные (аргументы) принимают только два значения: «истина», которая обозначается логической единицей – 1 и «ложь», обозначаемая логическим нулем – 0. Логическую функцию называют также предикатом.

Определение: Действия, совершаемые над логическими переменными для получения определенных логических функций, называются **логическими операциями.**

В алгебре логики используются следующие логические операции.

1. **Логическая операция ИНВЕРСИЯ (отрицание)**. В естественных языках соответствует словам *неверно, ложь* или частице «*не»,* в языках программирования обозначается *Not,* в алгебре логики обозначается $\bar{\boldsymbol{A}}$**.**

Инверсия каждому простому высказыванию ставит в соответствие составное высказывание, заключающееся в том, что исходное высказывание отрицается.

Математическая запись данной операции для логической переменной *A* будет иметь вид:

$$\boldsymbol{F} = \bar{A}.$$

2. **Логическая операция КОНЪЮНКЦИЯ (логическое умножение)**. В естественных языках соответствует союзу «*и»,* в языках программирования обозначается *And,* в алгебре логики обозначается & .

Конъюнкция каждым простым высказываниям ставит в соответствие составное высказывание, являющееся только тогда истинным, когда являются истинными простые высказывания, образующие составное высказывание.

Математическая запись данной операции для логических переменных *A, B, C, …* будет иметь вид:

$$\boldsymbol{F = A \ \& \ B \ \& \ C \ \& \ \ldots}$$

3. **Логическая операция ДИЗЪЮНКЦИЯ (логическое сложение)**. В естественных языках соответствует союзу «*или»,* в языках программирования обозначается *Or,* в алгебре логики обозначается V.

Дизъюнкция каждым простым высказываниям ставит в соответствие составное высказывание, являющееся только тогда истинным, когда хотя бы одно из образующих его высказываний является истинным.

Математическая запись данной операции для логических переменных *A, B, C, …* будет иметь вид:

$$F = A \vee B \vee C \ldots$$

4. **Логическая операция ИМПЛИКАЦИЯ (логическое следование)**. В естественных языках соответствует обороту речи, *если…, то …*, в языках программирования обозначается *If,* в алгебре логики обозначается ?.

Импликация каждым простым высказываниям ставит в соответствие составное высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда первое высказывание истинно, а второе высказывание ложно.

Математическая запись данной операции для двух логических переменных *A* и *B* будет иметь вид:

$$F = A \rightarrow B$$

5. **Логическая операция ЭКВИВАЛЕНЦИЯ (логическая равнозначность)**. В естественных языках соответствует обороту речи *тогда и только тогда,* в алгебре логики обозначается ⇔.

Эквиваленция каждым простым высказываниям ставит в соответствие составное высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда все простые высказывания, образующие составное высказывание, одновременно истинны или одновременно ложны.

Математическая запись данной операции для логических переменных *A*, *B*, *C*… будет иметь вид:

$$F = A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C \Leftrightarrow \cdots$$

2 Основные законы алгебры логики и правила преобразования логических выражений

В алгебре логики имеются законы, которые записываются в виде соотношений. Логические законы позволяют производить равносильные (эквивалентные) преобразования логических выражений.

Определение: Преобразования называются **равносильными**, если истинные значения исходной и полученной после преобразования логической функции совпадают при любых значениях входящих в них логических переменных.

Для простоты записи приведем основные законы алгебры логики для двух логических переменных A и B. Эти законы распространяются и на другие логические переменные.

1. Закон противоречия: $A\&\bar{A} \Leftrightarrow 0$;
2. Закон исключенного третьего: $A \vee \bar{A} \Leftrightarrow 1$;
3. Закон двойного отрицания: $\bar{\bar{A}} \Leftrightarrow A$;
4. Законы де Моргана:

$$\overline{A \vee B} = \bar{A} \mathbin{\&} \bar{B}; \ \overline{A \mathbin{\&} B} = \bar{A} \vee \bar{B}.$$

5. Законы повторения: $A \mathbin{\&} A \Leftrightarrow A$; $A \vee A \Leftrightarrow A$;
6. Законы поглощения: $A \vee (A \mathbin{\&} B) \Leftrightarrow A$; $A \mathbin{\&} (A \vee B) \Leftrightarrow A$.
7. Законы исключения констант:

$$A \vee 1 \Leftrightarrow 1; \ A \vee 0 \Leftrightarrow A; \ A \mathbin{\&} 1 \Leftrightarrow A; \ A \mathbin{\&} 0 \Leftrightarrow 0;$$

8. Коммутативность конъюнкции $A\&B \Leftrightarrow B\&A$;
9. Коммутативность дизъюнкции $AVB \Leftrightarrow BVA$;
10. Ассоциативность конъюнкции $A\&(B\&C) \Leftrightarrow (A\&B)\&C$;
11. Ассоциативность дизъюнкции $AV(BVC) \Leftrightarrow (AVB)VC$;
12. Дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции;

$$A\&(BVC) \Leftrightarrow (A\&B)V(A\&C)$$

13. Дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции

$$AV(B\&C) \Leftrightarrow (AVB)\&(AVC);$$

14. Законы склеивания:

$$(A\&B)V(\bar{A}\&B) \Leftrightarrow B; \ (AVB)\&(\bar{A}VB) \Leftrightarrow B$$

Доказательство:

$$(A\&B)V(\bar{A}\&B) \overset{8}{\Leftrightarrow} (B\&A)V(B\&\bar{A}) \overset{12}{\Leftrightarrow} B\&(A \vee \bar{A}) \overset{2}{\Leftrightarrow} B\&1 \overset{7}{\Leftrightarrow} B$$

СРС: Доказать вторую формулу закона склеивания $(AVB)\&(\bar{A}VB) \Leftrightarrow B$.

15. Закон контрапозиции: $(A \longrightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{B} \longrightarrow \bar{A})$.

Как уже отмечалось, с помощью законов алгебры логики можно производить равносильные преобразования логических выражений с целью их упрощения.

В алгебре логики на основе принятого соглашения установлены следующие правила (приоритеты) для выполнения логических операций: первыми выполняются операции в скобках, затем в следующем порядке: инверсия (отрицание), конъюнкция (&), дизъюнкция (v), импликация (→), эквиваленция (⇔).

Пример: Упростить логическую функцию:

$$F = A \vee \overline{A \,\&\, \bar{B}} \vee \overline{\bar{A} \vee B},$$

Решение:

$$F = A \vee \overline{A \& \bar{B}} \vee \overline{\bar{A} \vee B} \overset{4}{\Leftrightarrow} A \vee \bar{A} \vee \bar{B} \vee \overline{\bar{A} \vee B} \overset{4}{\Leftrightarrow} A \vee \bar{A} \vee \bar{B} \vee (A \& \bar{B}) \overset{8}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{8}{\Leftrightarrow} A \vee \bar{A} \vee \bar{B} \vee (\bar{B} \& A) \overset{6}{\Leftrightarrow} A \vee \bar{A} \vee \bar{B} \overset{2}{\Leftrightarrow} 1 \vee \bar{B} \overset{7}{\Leftrightarrow} 1$$

3 Логические функции и таблицы истинности

Определение: Соотношения между логическими переменными и логическими функциями в алгебре логики можно отобразить также с помощью соответствующих таблиц, которые носят название **таблиц истинности**.

Таблицы истинности находят широкое применение, поскольку наглядно показывают, какие значения принимает логическая функция при всех сочетаниях значений ее логических переменных. Таблица истинности состоит из двух частей. Первая (левая) часть относится к логическим переменным и содержит полный перечень возможных комбинаций логических переменных *A, B, C*... и т. д. Вторая (правая) часть этой таблицы определяет выходные состояния как логическую функцию от комбинаций входных величин.

Например, для логической функции $F = A \vee B \vee C$ (дизъюнкции) трех логических переменных *A, B,* и *C* таблица истинности будет иметь следующий вид (рисунок 1).

A	B	C	$F = A \vee B \vee C$
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	1
1	1	0	1
0	0	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

Рисунок 1 – Таблица истинности для логической функции $F = A \vee B \vee C$

Для записи значений логических переменных и логической функции данная таблица истинности содержит 8 строк и 4 столбца, т. е. число строк для записи значений аргументов и функции любой таблицы истинности будет равно 2^n, где n – число аргументов логической функции, а число столбцов равно $n + 1$.

Таблицу истинности можно составить для любой логической функции.

Пример: Составить таблицу истинности логической функции

$F = A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C$ (эквиваленции).

Решение:

A	B	C	$F = A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C$
0	0	0	1
1	0	0	0
0	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	1

Для двух двоичных переменных A и B существует шестнадцать логических функций, представленных в следующей таблице (таблица 1)

Таблица 1 – Логические функции двух переменных

A	B	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функция F_1 *всегда равна 0* и называется функцией константы нуля, или генератора нуля.

Функция $F_2 = A \,\&\, B$ называется функцией конъюнкции.

Функция $F_3 = A \,\&\, \overline{B}$ называется функцией запрета по логической переменной *A*.

Функция $F_4 = A$ называется функцией повторения по логической переменной *A*.

Функция
$F_5 = \overline{A} \,\&\, B$
называется функцией запрета по логической переменной *B*.

Функция $F_6 = B$ называется функцией повторения по логической переменной *B*.

Функция $F_7 = \overline{A} \,\&\, B \vee A \,\&\, \overline{B}$ называется функцией исключающее «ИЛИ».

Функция $F_8 = A \vee \mathrm{B}$ называется функцией дизъюнкции.

Функция
$F_9 = \overline{A \vee B}$ называется функцией Пирса.

Функция $F_{10} = A \& B \Leftrightarrow \bar{A} \& \bar{B}$ называется функцией эквиваленции.

Функция $F_{11} = \overline{B}$ называется функцией отрицания (инверсии) по логической переменной *B*.

Функция $F_{12} = B \rightarrow A$ называется функцией импликации $B \rightarrow A$.

Функция $F_{13} = \overline{A}$ называется функцией отрицания (инверсии) по логической переменной *A*.

Функция $F_{14} = A \rightarrow B$ называется функцией импликации $A \rightarrow B$.

Функция $F_{15} = \overline{A \,\&\, B}$ называется функцией Шеффера.

Функция $F_{16} = 1$ называется функцией генератора 1.

Замечание: Среди перечисленных выше логических функций переменных можно выделить несколько логических функций, с помощью которых можно выразить другие логические функции.

Определение: Операцию замены одной логической функции другой в алгебре логики называют **операцией суперпозиции** или **методом суперпозиции**.

Например, функцию Шеффера можно выразить при помощи логических функций дизъюнкции и отрицания, используя закон де Моргана:

$$F_{15} = \overline{A \,\&\, B} = \overline{A} \vee \overline{B}.$$

Определение: Логические функции, с помощью которых можно выразить другие логические функции методом суперпозиции, называются **базовыми логическими функциями**. Такой набор базовых логических функций называется **функционально полным набором логических функций**.

На практике наиболее широко в качестве такого набора используют три логических функции: конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание.

Определение: Если логическая функция представлена с помощью базовых функций, то такая форма представления называется **нормальной**.

В предыдущем примере логическая функция Шеффера, выраженная через базовые функции, представлена в нормальной форме.

При помощи набора базовых функций и соответствующих им технических устройств, реализующих эти логические функции, можно разработать и создать любое логическое устройство или систему.

4 Логические элементы и синтез логических схем

Сложные цифровые логические устройства, входящие в состав компьютера, состоят из ряда элементарных логических элементов, построенных на базе средств электронной техники. Логические элементы позволяют реализовать любую логическую функцию. Входные и выходные сигналы логических элементов, соответствующие двум логическим состояниям 1 и 0. Рассмотрим логические элементы, которые составляют функционально полную систему для проектирования цифровых логических устройств.

1. Логический элемент НЕ, который называется также инвертором, выполняет логическую операцию отрицания (инверсии).

Графическое обозначение

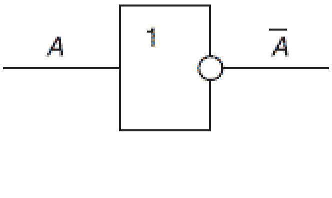

Таблица истинности

A	$F=\overline{A}$
0	1
1	0

2. Логический элемент И, называемый также конъюнктором, выполняет операцию логического умножения (конъюнкции), теоретически может иметь бесконечное число входов, на практике ограничиваются числом входов от двух до восьми.

Графическое обозначение двухвходового элемента И

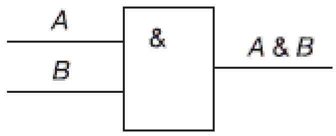

Таблица истинности

A	B	$F = A \& B$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

3. Логический элемент ИЛИ, называемый также дизъюнктором, выполняет операцию логического сложения (дизъюнкции), теоретически может иметь бесконечное число входов, на практике ограничиваются числом входов от двух до восьми.

Графическое обозначение двухвходового элемента ИЛИ

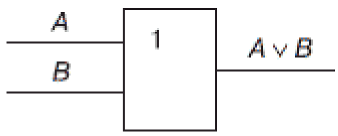

Таблица истинности

A	B	$F = A \vee B$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

При проектировании цифровых логических устройств часто возникает задача по заданной таблице истинности записать выражение для логической функции и реализовать ее в виде логической схемы.

Определение: Задачу определения выражения логической функции по заданной таблице истинности называют **задачей синтеза логических схем** или логических устройств.

Определение: Минтермом называют логическую функцию, которая принимает значение логической единицы только при одном значении логических переменных и значение логического нуля при других значениях логических переменных. Например, минтермами являются логические функции F_2, F_3, F_5 и F_9 , рассмотренные ранее.

Определение: Макстерном называют логическую функцию, которая принимает значение логического нуля только при одном значении логических переменных и значение логической единицы при других значениях логических переменных. Например, макстернами являются логические функции F_8, F_{12}, F_{14} и F_{15}, рассмотренные ранее.

Пусть мы имеем некоторую таблицу истинности, согласно которой необходимо записать выражение логической функции. Рассмотрим на примере, как из минтермов и макстернов можно составить логические функции, называемые совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ), и совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ), которые будут представлять искомую логическую функцию по заданной таблице истинности.

Пример: Для данной таблицы истинности (рисунок 2) синтезировать (записать) выражение для выходной функции *F*, провести ее преобразование (минимизацию) на основе законов алгебры логики и, используя основные логические элементы – НЕ, И и ИЛИ, разработать логическую схему реализации полученной функции.

№	*A*	*B*	*C*	*F*
1	0	0	0	0
2	0	0	1	0
3	0	1	0	1
4	0	1	1	0
5	1	0	0	0
6	1	0	1	1
7	1	1	0	0
8	1	1	1	1

Рисунок 2 – Таблица истинности логических переменных *A, B* и *C*

Для решения указанной задачи представим логическую функцию *F в* виде СДНФ, а затем и в СКНФ. Найдем вспомогательные функции минтермы и макстермы. В заданной таблице истинности выходная функция *F* принимает логическое значение, равное логической единице, при комбинациях логических переменных *A, B* и *C*, указанных под номерами 3, 6, 8, а значение, равное логическому нулю – при комбинациях, указанных под номерами 1, 2, 4, 5,7.

Минтермы запишем в следующем виде:

$$\mathrm{C}_3 = \overline{\mathrm{A}}\&B\&\bar{C};\mathrm{C}_6 = A\&\bar{B}\&C;\mathrm{C}_8 = A\&B\&C$$

Минтермы представляют собой логические произведения (конъюнкции) логических переменных *A, B,* и *C* при значениях логической функции *F,* равных логической единице (комбинации 3, 6, 8). Сомножители (логические переменные *A, B* и *C*) входят в минтерм в прямом виде (без отрицания), если их значения равны логической единице, и в инверсном (с отрицанием), если их значения равны логическому нулю. Логическая функция *F* в СДНФ будет равна логической сумме минтермов:

$$F = \mathrm{C}_3 \vee \mathrm{C}_6 \vee \mathrm{C}_8 = \overline{\mathrm{A}}\&B\&\bar{C} \vee A\&\bar{B}\&C \vee A\&B\&C$$

Проведём минимизацию логической функции F c использованием законов алгебры логики получим ее искомое выражение:

$$F = \overline{\mathrm{A}}\&B\&\bar{C} \vee A\&\bar{B}\&C \vee A\&B\&C \overset{8}{\Leftrightarrow} \overline{\mathrm{A}}\&B\&\bar{C} \vee ((A\&C)\&\bar{B}) \vee ((A\&C)\&B)) \overset{12}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{12}{\Leftrightarrow} \overline{\mathrm{A}}\&B\&\bar{C} \vee ((A\&C)\&(\bar{B} \vee B)) \overset{2}{\Leftrightarrow} \overline{\mathrm{A}}\&B\&\bar{C} \vee ((A\&C)\&1)) \overset{7}{\Leftrightarrow} \overline{\mathrm{A}}\&B\&\bar{C} \vee (A\&C)$$

Т.е. $F = \overline{\mathrm{A}}\&B\&\bar{C} \vee (A\&C)$

Макстермы функции, согласно таблице 1, запишем в следующем виде:

$\mathrm{C}_1 = A \vee B \vee C;\ \mathrm{C}_2 = A \vee B \vee \bar{C};\mathrm{C}_4 = A \vee \bar{B} \vee \bar{C};\ \mathrm{C}_5 = \overline{\mathrm{A}} \vee B \vee C;\ \mathrm{C}_7 = \overline{\mathrm{A}} \vee \bar{B} \vee C;$

Макстермы представляют собой логические суммы (дизъюнкции) логических переменных *A, B,* и *C* при значениях логической функции *F*, равных логическому нулю (комбинации 1, 2, 4, 5, 7). Слагаемые (логические переменные *A, B, и C)* входят в макстерм в прямом виде (без отрицания), если их значения равны логическому нулю, и в инверсном (с отрицанием), если их значения равны логической единице. Логическая функция *F* в *С*КНФ будет равна логическому произведению макстермов:

$$F = \mathrm{C}_1 \wedge \mathrm{C}_2 \wedge \mathrm{C}_4 \wedge \mathrm{C}_5 \wedge \mathrm{C}_7$$

Поскольку полученное выражение для F в виде СКНФ является более громоздким по сравнению с представлением *F* в виде СДНФ, то в качестве окончательного выражения для *F* примем ее выражение в виде СДНФ, т. е.

$$F = \overline{\mathrm{A}}\&B\&\bar{C} \vee (A\&C)$$

Используем полученное выражение логической функции *F* для разработки (построения) логической схемы на основе функционально полного набора логических элементов НЕ, И и ИЛИ.

Реализация функции *F* в виде логической схемы, приведена на рисунке 3.

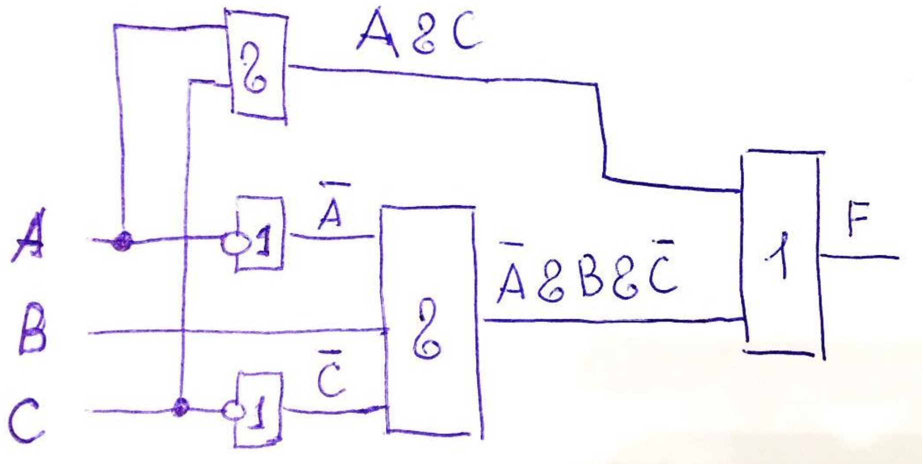

Рисунок 3 – Реализация функции *F* в виде логической схемы

На основе функционально полного набора логических элементов построены различные электронные устройства, входящие в состав компьютера. К таким устройствам относятся сумматоры (выполняющие операции сложения двоичных чисел), триггеры (устройства, имеющие два устойчивых состояния: логического нуля и логической единицы и используемые в качестве двоичных элементов памяти), регистры памяти (состоящие из набора триггеров), двоичные счетчики, селекторы (переключатели сигналов), шифраторы, дешифраторы и т. д.

Упражнения для самостоятельного выполнения

1. Преобразовать следующие логические выражения:

а) $(A \& B) \vee (A \& \bar{B})$;

б) $(A \vee B) \& (A \vee \bar{C}) \& (A \vee \bar{B})$;

в) $(A \vee B \vee C) \& \overline{(\bar{A} \vee B \vee C)}$.

2. Доказать, что число логических функций двух логических переменных равно 16.

3. Составить таблицы истинности для следующих логических функций:

а) $F_1 = (\bar{A} \& \bar{B}) \vee (A \& B)$;

б) $F_2 = (\bar{A} \vee \bar{B}) \& (A \vee B)$;

в) $F_3 = (A \& B \& C \& D) \vee (A \& B \& C \& D)$.

4. Записать выражения для логических функций F_1 и F_2 в виде СДНФ и СКНФ. Логические функции F_1 и F_2 представлены далее соответственно таблицами истинности.

а)

A	B	F_1
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

б)

A	B	F_2
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

7. По заданному преподавателем варианту таблицы *N* составить таблицу истинности логической функции *F*, используя таблицу *M*. Найти выражение для логической функции *F*, осуществить ее преобразование в соответствии с основными законами алгебры логики и разработать логическую схему полученной функции с использованием логических схем НЕ, И, ИЛИ. Для графического отображения разработанной логической схемы использовать любой графический редактор.

Таблица M

№	*A*	*B*	*C*
1	0	0	0
2	0	0	1
3	0	1	0
4	0	1	1
5	1	0	0
6	1	0	1
7	1	1	0
8	1	1	1

Таблица N

№ варианта	*Номера комбинаций логических переменных A, B, C (см. табл. M), при которых F = 1, при остальных значениях F = 0*
1	1, 2, 3
2	1, 2, 4
3	1, 2, 5
4	1, 2, 6
5	1, 2, 7
6	1, 2, 8
7	2, 3, 4
8	2, 3, 5
9	2, 3, 6
10	2, 3, 7
11	2, 3, 8
12	2, 4, 5
13	2, 4, 6
14	2, 4, 7
15	2, 5, 7
16	3, 4, 8
17	3, 5, 8
18	4, 5, 7
19	4, 6, 7
20	4, 6, 8