Лабораторная работа № 2

Тема: Решение задач линейного программирования графическим методом.

Цель: Научиться применять на практике графический метод решения оптимизационных задач линейного программирования

I Теоретические сведения

1.Графический метод решения задач линейного программирования

Графический метод основан на геометрической интерпретации задач линейного программирования (ЗЛП) и применяется в основном при решении задач двумерного и только некоторых задач трехмерного пространства. Задачу пространства размерностью больше трех изобразить графически вообще невозможно.

Пусть ЗЛП задана в двумерном пространстве, т. е. ограничения содержат две переменные. Найти минимальное значение функции

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2 \qquad (1)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m; \end{cases} \qquad (2)$$

и граничных условиях

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \qquad (3)$$

Каждое неравенство системы (2) геометрически определяет полуплоскость с граничной прямой

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i,$$

где i = 1, 2, …, m.

Условия $x_1 \ge 0$ и $x_2 \ge 0$ определяют полуплоскости с граничными прямыми $x_1 = 0$ и $2\ x_2 = 0$. Если система (2) при условии (3) совместна, то полуплоскости, как выпуклые множества, пересекаясь, образуют выпуклое множество, точки которого являются решением данной системы.

Совокупность этих решений называется многоугольником решений. Он может быть точкой, отрезком, лучом, многоугольником, неограниченной многоугольной областью. Таким образом, геометрически ЗЛП представляет собой отыскание такой точки многоугольника решений, координаты которой доставляют линейной функции минимальное (максимальное) значение,

причем допустимыми решениями служат все точки многоугольника решений.

Допустим, что система (2) при условии (3) совместна и ее многоугольник решений ограничен.

Линейная функция (1) при фиксированном значении Z является уравнением прямой:

$$C_1x_1 + C_2x_2 = \text{const}. \qquad (*)$$

Построим многоугольник решений системы (2), (3) и график линейной функции (1) при Z = 0 (рисунок 1). Тогда поставленной ЗЛП можно дать следующую интерпретацию: найти точку многоугольника решений, в которой прямая (*) является опорной и функция Z при этом достигает минимума.

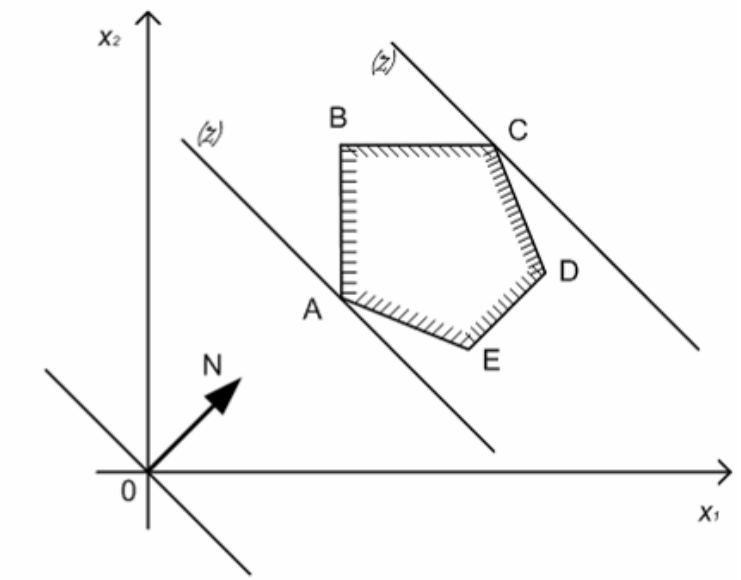


Рисунок 1 – Многоугольник решений

Значения Z возрастают в направлении вектора N = (C_1, C_2), поэтому прямую Z = 0 передвигаем параллельно самой себе в направлении вектора N.

Из рисунка 1 видно, что прямая Z = const дважды становится опорной — в точках A и C, что соответствует минимуму в точке A и максимуму в точке C. Координаты точки A (x_1; x_2) находим, решая систему уравнений для прямых AB и AE. Если многоугольник решений представляет неограниченную многоугольную область, то возможны два случая:

1) прямая Z = const, передвигаясь в направлении N или противоположном ему, постоянно пересекает многоугольник решений и ни в какой точке не является опорной; значит, линейная функция не ограничена на многоугольнике решений как сверху, так и снизу (рисунок 2, а);

2) прямая Z = const, передвигаясь, все же становится опорной. Тогда в зависимости от вида области линейная функция может быть ограничена только сверху (рисунок 2, б), только снизу (рисунок 2, в) или сверху и снизу (рисунок, г).

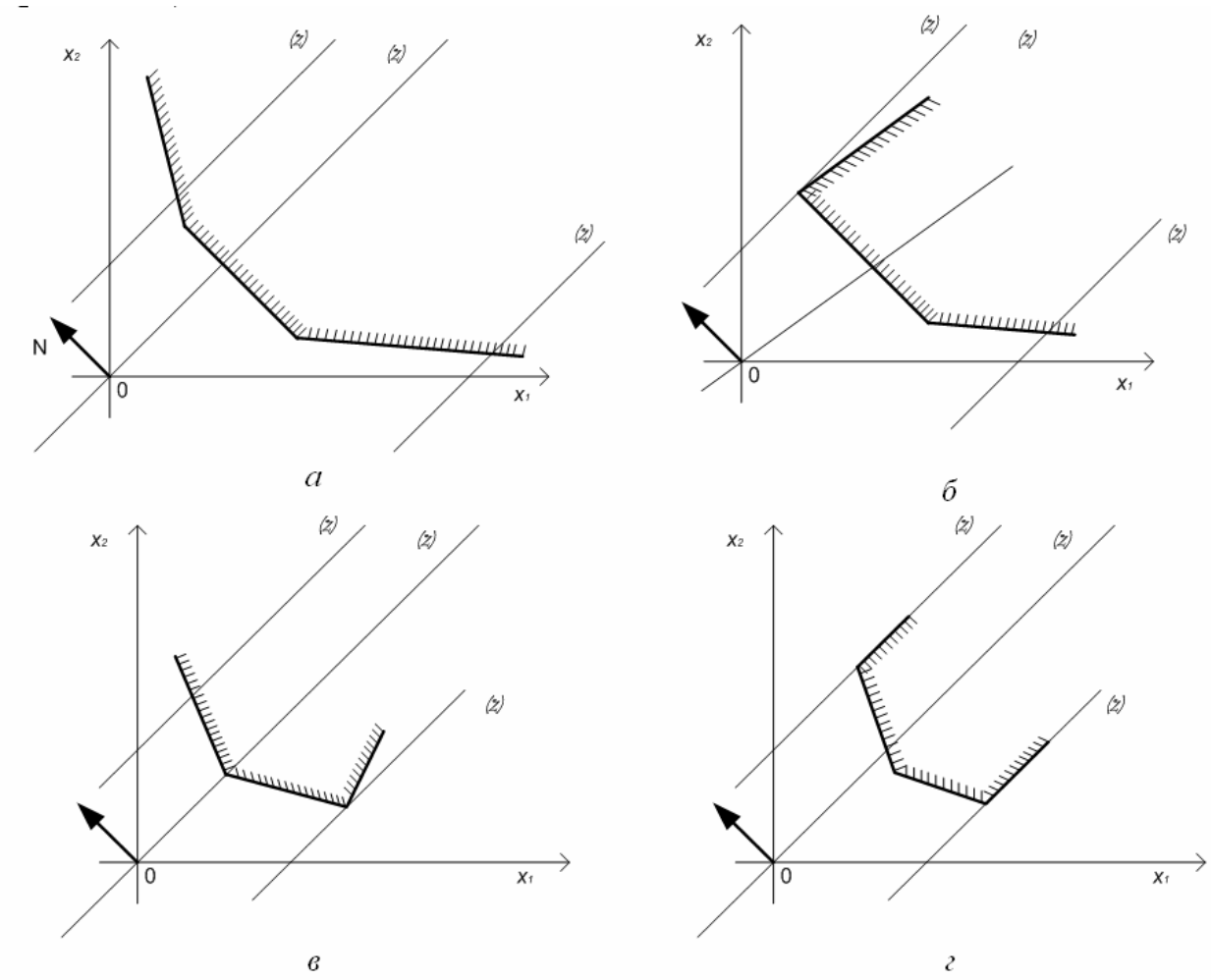


Рисунок 2 – Возможные случаи геометрической интерпретации ЗЛП

В целом, с помощью графического метода может быть решена ЗЛП, система ограничений которой содержит n неизвестных и m независимых уравнений, если n и m связаны соотношением n – m = 2.

2. Построение в Excel графиков функций по двум заданным точкам

2.1 Построение графика одной функции по двум заданным точкам

Для построения графика функции (например $x_1+3x_2=18$) достаточно выполнить следующие действия:

1. Найти две произвольные точки, принадлежащие заданной прямой. Для этого заполнить таблицу значений координат, подставив сначала в заданное уравнение $x_1=0$, при этом, вычислить x_2; затем подставить $x_2=0$ и вычислить значение координаты x_1 (см. рисунок 1)

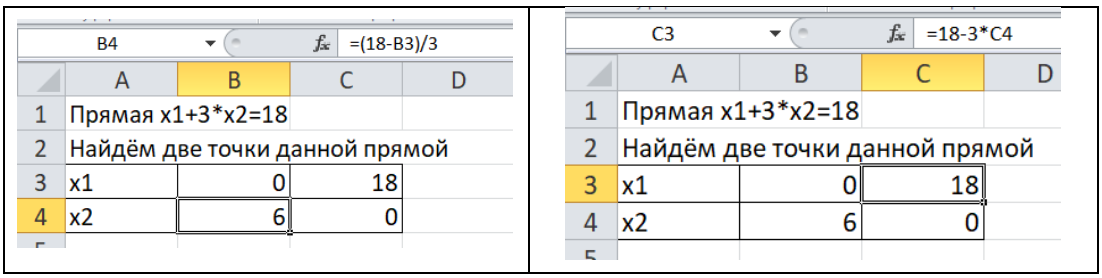


Рисунок 1 – Расчёт координат двух точек прямой $x_1+3x_2=18$

2. Для построения графика функции, проходящей через две точки, щёлкаем по любой свободной клетке листа и затем выбираем в меню «Вставка» → «Построение точечной диаграммы» (рисунок 2). При этом на рабочем листе появится пустое поле для построения диаграммы.

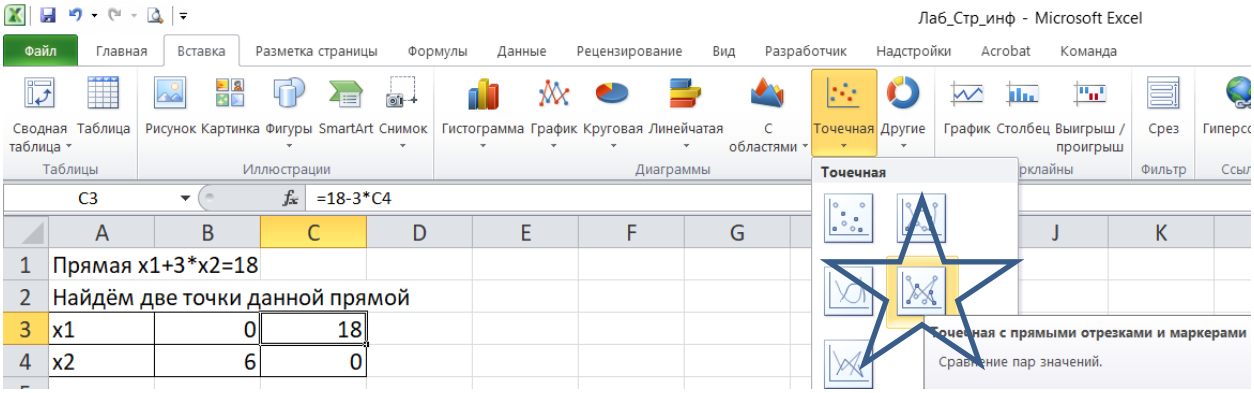


Рисунок 2 – Вставка точечной диаграммы

3. На появившемся поле диаграммы вызываем контекстное меню щелчком правой кнопки мыши и выбираем опцию «Выбор данных» (рисунок 3)

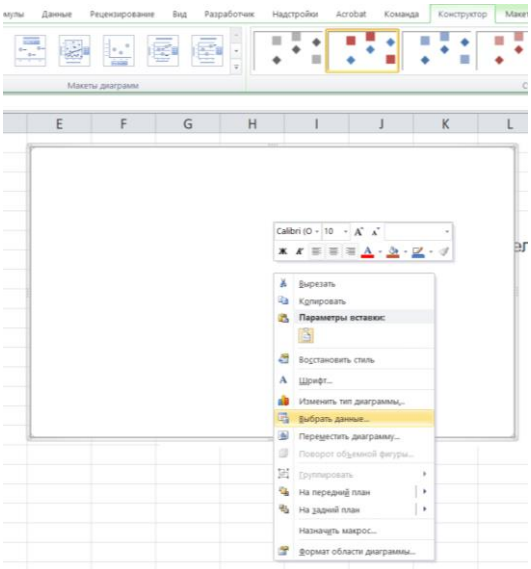
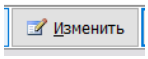


Рисунок 3 – Выбор данных для построения графика

4. В появившемся диалоговом окне указываем диапазон данных для построения диаграммы (это можно сделать мышью) и меняем название подписи прямой «Ряд 1» на «L1» (рисунок 3), нажав на кнопку 

и заполнив вновь появившееся диалоговое окно (рисунок 4)

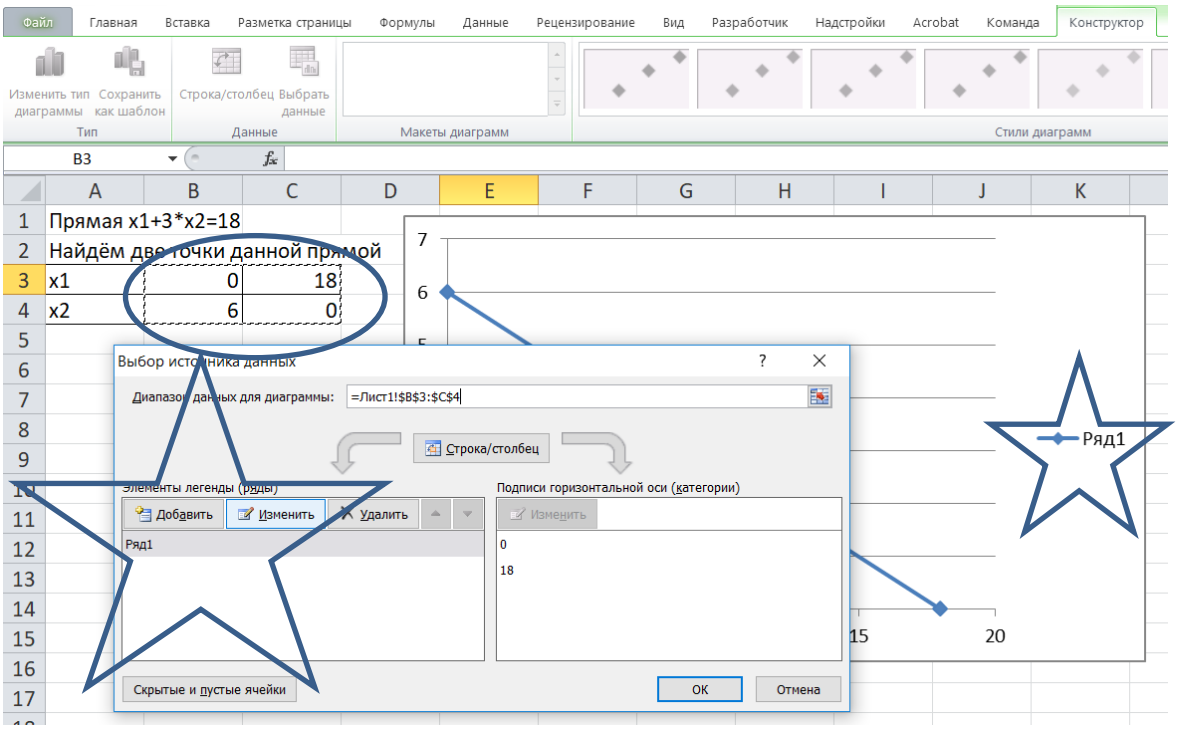


Рисунок 3 – выбор диапазона данных для построения прямой на графике

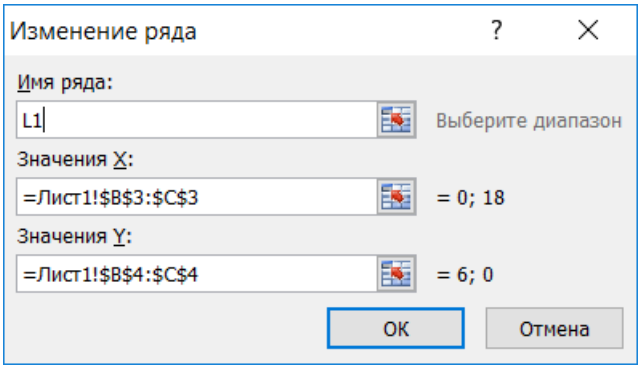
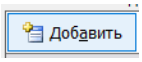


Рисунок 4 – Изменение подписи прямой

2.2 Построение в Excel ряда графиков функций по двум заданным точкам

Для построения на этой же диаграмме ещё ряда функций, необходимо сначала произвести расчёт для каждой из них координат пары точек, а затем в диалоговом окне, показанном на рисунке 3 выполнить следующие действия:

1) нажать на кнопку 

2) в появившемся диалоговом окне (рисунок 5) заполнить наименование очередной прямой и указать диапазоны её координат

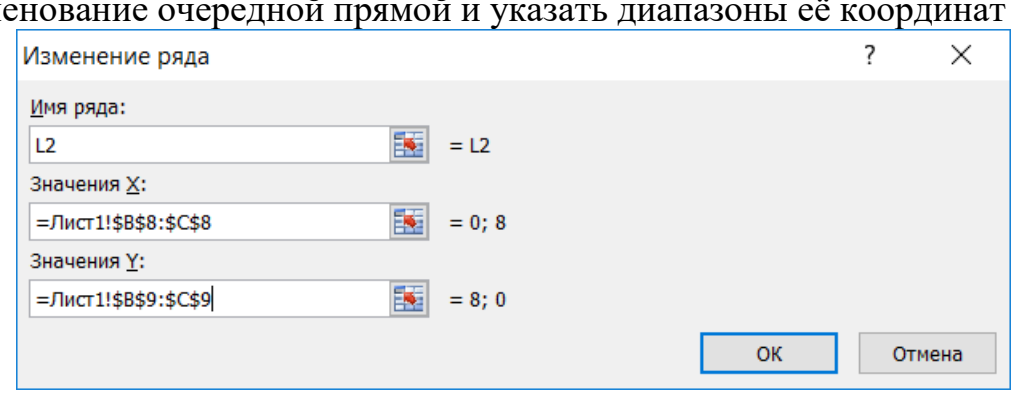


Рисунок 5

3) аналогичным образом построить все остальные графики

3.Пример решения задачи линейного программирования графическим методом.

Пусть задача линейного программирования задана следующим условием.

Найти графическим методом максимум целевой функции

$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \ (1) \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \ (2) \\ x_2 \le 5, \ (3) \\ 3x_1 \le 21, \ (4) \\ x_1 \ge 0, \ x_1 \ge 0. \ (5, 6) \end{cases}$$ при ограничениях

Решим её графически.

1. Все неравенства системы превратим в верные равенства и для полученных уравнений построим графики прямых, заданных парами точек, рассчитав предварительно координаты этих точек.

2. Найдём область допустимых значений. Для этого

а) подставим координаты точки (0,0) в первое неравенство $x_1+3x_2 \le 18$, получим $0 \le 18$ – верное неравенство. Неравенство является верным, следовательно решением неравенства (1) будет

та полуплоскость, в которой пробная точка расположена (на рисунке ниже прямой L1).

Отметим эту полуплоскость, добавив тень в нужную сторону от этой прямой.

Добавление тени производим следующим образом :

- щелчок по нужной прямой (она при этом станет выделена);
- выбор «Формат»→ «Эффекты фигур» → «Тень». И затем выбираем нужное расположение тени. (Рисунок 6);
- аналогичным образом определяем решения всех остальных неравенств.

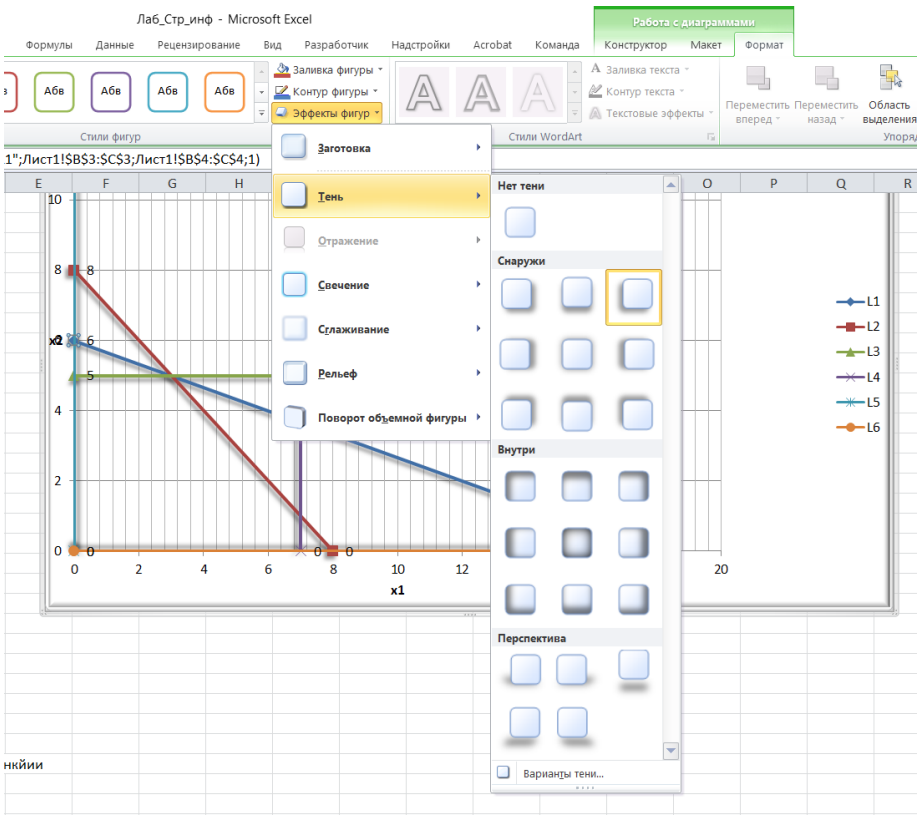


Рисунок 6

Таким образом, получаем графическое изображение области допустимых значений для заданной целевой функции (рисунок 7)

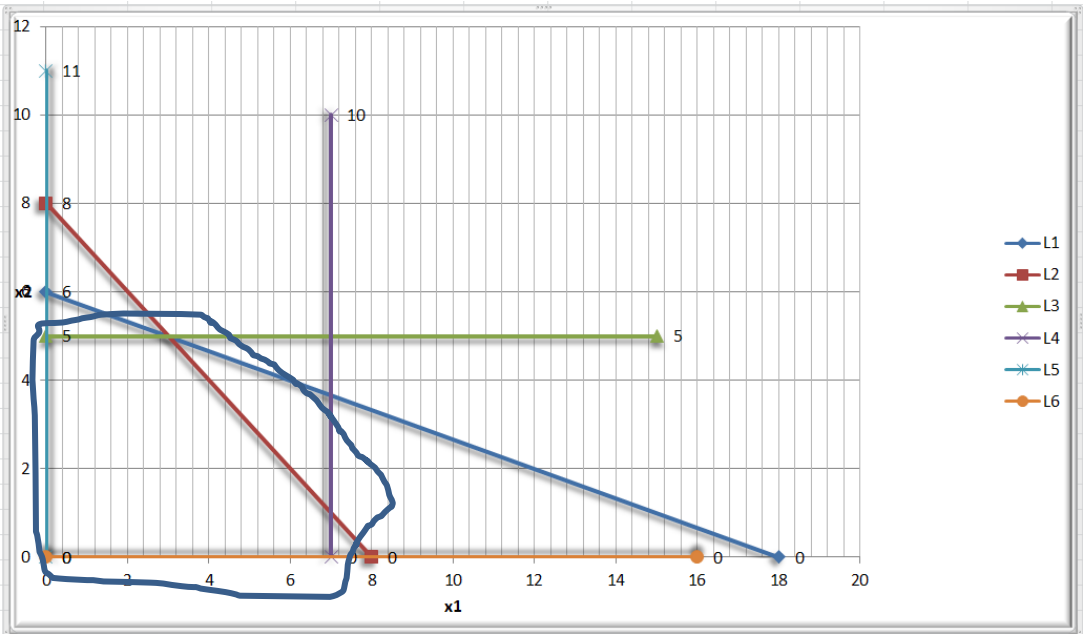


Рисунок 7 – Область допустимых значений
для заданной целевой функции

3. Рассмотрим теперь целевую функцию $F = 2x_1 + 3x_2$.

Построим линии уровня для значений функции F = 1 и F = 10 (числовые значения выбраны произвольно). На листе Excel добавляем данные (Рисунок 8)

34			
35	Построим линии уровня для целевой функйии		
36	F=1 или 2*x1+3*x2=1		
37	x1	-5	3,5
38	x2	3,666667	-2
39			
40	F=10 или 2*x1+3*x2=10		
41	x1	-4	6,5
42	x2	6	-1
43			

Рисунок 8 – Данные для построения линий уровня целевой функции.

Затем строим графики двух заданных линий F=1 и F=10 на той же диаграмме (рисунок 9) и визуально определяем направление градиента (т.е. вектора роста функции)

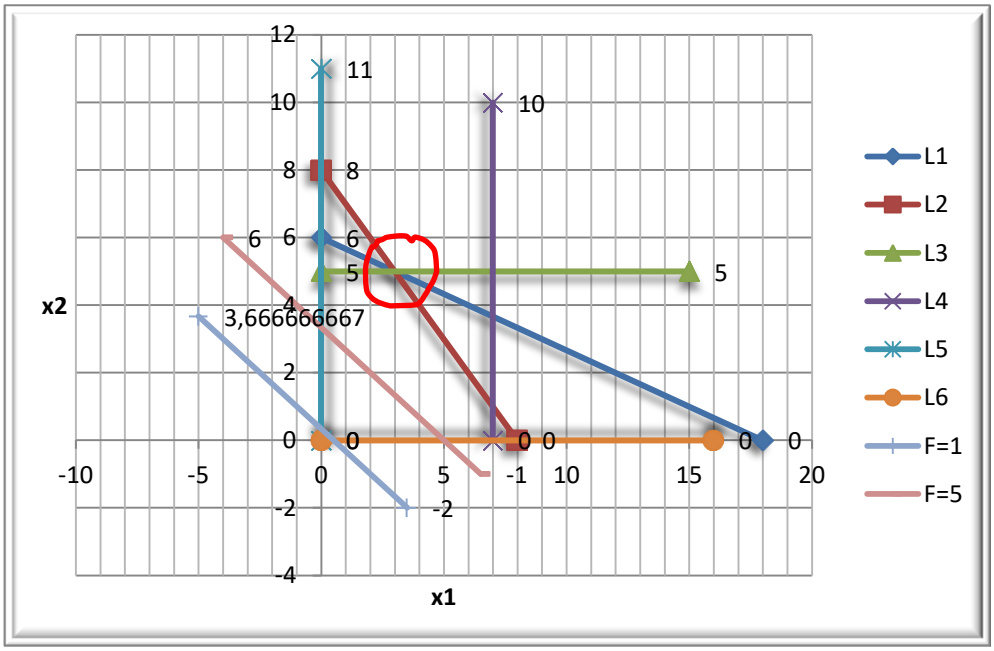


Рисунок 9

Очевидно, что своего максимума функция достигает в точке, отмеченной на рисунке 9. Это точка пересечения прямых L1 и L2.

4. Для нахождения координат этой точки необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} x1 + 3x2 = 18 \\ 2x1 + x2 = 16 \end{cases}$$

Найденные решения и будут оптимальным решением целевой функции.

II Индивидуальные задания

В редакторе электронных таблиц реализовать графический способ решения ЗЛП. Найти минимум и максимум целевой функции при заданных ограничениях (см таблицу 1).

Таблица 1 – Варианты задания

Вариант	Целевая функция, система ограничений и граничные условия
1	$Z = x_1 + 5x_2$ $\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 9, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 50, \\ -x_1 + 4x_2 \geq 19; \end{cases}$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$
2	$Z = 5x_1 + 3x_2$ $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 \geq 17, \\ x_1 + 2x_2 \leq 34, \\ -4x_1 + 9x_2 \geq 17; \end{cases}$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$
3	$Z = 4x_1 + 3x_2$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 4, \\ x_1 + 3x_2 \leq 37, \\ -4x_1 + 9x_2 \geq 20; \end{cases}$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$
4	$Z = 3x_1 + 2x_2$ $\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \leq 29, \\ 3x_1 - x_2 \leq 14, \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 38; \end{cases}$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$
5	$Z = 3x_1 + 4x_2$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 5, \\ -x_1 + 3x_2 \geq 10, \\ x_1 + 2x_2 \leq 40; \end{cases}$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$
6	$Z = 5x_1 + x_2$ $\begin{cases} 10x_1 - x_2 \geq 57, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 53, \\ 6x_1 - 7x_2 \leq 15; \end{cases}$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

7	$Z = 6x_1 + x_2$ $\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 9, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 50, \\ -x_1 + 4x_2 \geq 19; \end{cases}$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$
8	$Z = x_1 + 7x_2$ $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 53, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ 7x_1 + 3x_2 \geq 71; \end{cases}$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$
9	$Z = x_1 + 8x_2$ $\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \leq 78, \\ 5x_1 - 6x_2 \leq 26, \\ x_1 + 4x_2 \geq 26; \end{cases}$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$
10	$Z = 3x_1 + 2x_2$ $\begin{cases} 9x_1 - 10x_2 \leq 17, \\ 13x_1 + 2x_2 \geq 41, \\ x_1 + 3x_2 \geq 43; \end{cases}$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

III Отчёт

Отчёт о лабораторной работе должен содержать:

1. Приложение с текстом файла, созданного в редакторе электронных таблиц при решении вашего варианта задачи линейного программирования (в формате .xls).

2. Сам отчёт о лабораторной работе в формате .doc, в котором содержится:

- тема и цель работы
- условие задания;
- математическую модель задачи линейного программирования;
- описание разработанного алгоритма реализации графического метода решения задач линейного программирования (скриншоты из файла .xls с пояснениями);
- выводы.