ЛЕКЦИЯ

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

1. Постановка транспортной задачи и стратегия решения.
2. Нахождение начального плана перевозок методом минимального элемента
3. Улучшение начального плана перевозок методом потенциалов

1. Постановка транспортной задачи и стратегия решения.

Определение 1: Транспортная задача – это задача отыскания таких путей перевозки продукта от пунктов производства к пунктам потребления, при которых общая стоимость перевозок оказывается минимальной.

Предположим, что в пунктах A_1, A_2, … , A_m хранится однородный груз в количестве a_1, a_2, … , a_{mv}единиц соответственно. Этот груз следует доставить в n заданных пунктов B_1, B_2, … , B_n, причём в каждый из них следует завезти соответственно b_1, b_2, … , b_n единиц этого груза. Обозначим через c_{ij} стоимость перевозки единицы груза из пункта A_i в пункт B_j.
Транспортные задачи делятся на две группы:
1) Задачи, удовлетворяющие условию баланса

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

Это означает, что общий запас груза на всех пунктах хранения равен суммарной потребности всех пунктов назначения.
2) Задачи с нарушенным балансом, среди которых выделяют два случая:

а) $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ **(суммарные запасы больше суммарных потребностей);**

б) $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ **(суммарные запасы меньше суммарных потребностей).**

Рассмотрим формализацию транспортной задачи, удовлетворяющей условию баланса.
Обозначим через x_{ij} Количество груза, перевозимого из пункта A_i в пункт B_j.
Тогда суммарная стоимость перевозок имеет вид

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \,. \qquad \ldots (1)$$

Ограничения представляются уравнениями вывоза и привоза груза:

$$x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = a_i \,, \quad i = 1,2,\ldots,m; \qquad \ldots(2)$$

$$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj} = b_j \,, \quad j = 1,2,\ldots,n; \qquad \ldots(3)$$

Граничные условия

$$x_{ij} \geq 0 \,, \quad i = 1,2,\ldots,m; \quad j = 1,2,\ldots,n \,. \qquad \ldots(4)$$

Замечание: Уравнение (2) означает, что из каждого пункта хранения A_i вывозится весь груз, а уравнение (3) означает, что в каждый пункт B_j поступает ровно столько груза, сколько требуется. Условие (4) свидетельствует о том, что груз либо вывозится из п. A_i в п. B_j и тогда $x_{ij}>0$, либо нет, и тогда $x_{ij}=0$.

Решение x_{ij}, $i = 1,2,\ldots,m$; $j = 1,2,\ldots,n$, системы (13.2) - (13.4) называется *планом* перевозки.

Требуется найти такой план перевозок, чтобы их суммарная стоимость была минимальной, т.е.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min \,. \qquad \ldots(5)$$

Условия задачи удобно записывать в виде *матрицы перевозок* (табл. 1).

Таблица 1

Пункты	B_1	B_2	...	B_j	...	B_n	Запасы
A_1	c_{11}	c_{12}		c_{1j}		c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}		c_{2j}		c_{2n}	a_2
⋮							⋮
A_i	c_{i1}	c_{i2}		c_{ij}		c_{in}	a_i
⋮							⋮
A_m	c_{m1}	c_{m2}		c_{mj}		c_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n	Сумма

Стратегия решения задачи:

1. **Находится начальный план перевозок.**

2. **Производится улучшение начального плана, т.е. последовательный переход от одного плана к другому, связанный с уменьшением суммарной стоимости перевозок.**

2. Нахождение начального плана перевозок методом минимального элемента

Определение 2: Клетки матрицы, где $x_{ij}>0$ будем называть **базисными**, а остальные (там, где $x_{ij}=0$) будем называть **свободными**.

При решении транспортной задачи всегда! В матрице перевозок имеется (m+n-1) базисных клеток.
Для нахождения значения x_{ij} используется следующая формула:

$$x_{ij} = min\begin{cases} \text{остаток груза в пункте } A_i \\ \text{неудовл.}-\text{нные потребности в п. } B_j \end{cases} \quad \ldots(6)$$

Значения $x_{ij}=0$ не записываются в матрицу, а вместо них ставится большая жирная точка (•)

Метод минимального элемента

В этом методе по формуле (6) последовательно заполняются клетки с наименьшей стоимостью перевозок. Если имеется несколько клеток с наименьшей стоимостью, то из них выбирается любая.

Пример 13.4. Найти начальный план перевозок в транспортной задаче, заданной матрицей (табл. 2).

Таблица 2

Пункты	B_1	B_2	B_3	Запасы
A_1	2 •	3 •	4 20	20
A_2	1 10	2 20	5 10	40
Потребности	10	20	30	60

□ Заполняем клетку с наименьшей стоимостью, равной 1:

$$x_{21} = \min [40, 10] = 10.$$

Тогда потребности в пункте B_1 удовлетворены и $x_{11} = 0$ (в табл. 2 ставится точка), первый столбец выбывает из рассмотрения.

Из оставшихся клеток ищем клетку с наименьшей стоимостью и заполняем ее: $x_{22} = \min [(40 - 10), 20] = 20$. Тогда $x_{12} = 0$ (в табл. 2 ставится точка), потребности в пункте B_2 удовлетворены и выбывает второй столбец.

Из оставшихся двух клеток заполняем клетку с наименьшей стоимостью:

$x_{13} = \min [20, 30] = 20$. Тогда первая строка выбывает (запасы в пункте A_1 исчерпаны) и $x_{23} = \min [(40 - 30), (30 - 20)] = 10$.

Таким образом, получен начальный план перевозок

$$x_{11} = 0, \quad x_{12} = 0, \quad x_{13} = 20,$$
$$x_{21} = 10, \quad x_{22} = 20, \quad x_{23} = 10$$

с суммарной стоимостью

$$f = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 20 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 20 + 5 \cdot 10 = 180.$$

При этом число базисных клеток равно (m+n-1)=2+3-1=4

Замечание. При нахождении начального плана перевозок возможен случай вырождения, когда в результате вычислений значения x_{ij} получается, что потребности в пункте B_j удовлетворены, а запасы в пункте A_i исчерпаны. Тогда одновременно из рассмотрения выбывают строка и столбец. В этом случае рекомендуется поставить в одну из клеток выбывающих строки и столбца (лучше в клетку с наименьшей стоимостью) так называемый *базисный нуль*. Клетка с базисным нулем считается базисной (в ней пишется 0), а общее число базисных клеток остается равным $(m + n - 1)$.

3. Улучшение начального плана перевозок методом потенциалов

Метод потенциалов обеспечивает улучшение начального плана перевозок. При этом происходит переход от одного плана к другому (от одной матрицы перевозок к другой), до тех пор, пока уменьшение стоимости перевозок станет невозможным.

Определение 3: Цикл – замкнутая ломаная с вершинами в клетках и звеньями, расположенными вдоль строк и столбцов матрицы перевозок. В каждой вершине встречаются два звена, причём одно из них располагается по строке, а другое по столбцу. Число вершин цикла чётно. Циклом может быть самопересекающаяся ломаная, но точки её самопересечения не могут быть вершинами цикла.

Определение 4: Означенный цикл – цикл, в котором некоторой вершине приписан знак «+», а затем при обходе цикла в каком-либо направлении знаки чередуются.

Определение 5: Сдвиг по циклу на число $\theta \geq 0$(тетта) – это сдвиг, при котором значения x_{ij} , стоящие в положительных вершинах цикла, увеличиваются на θ, а стоящие в отрицательных вершинах – уменьшаются на число θ.

Определение 6: Потенциалы – это числа α_i, где $i = \overline{1..m}$ и β_j, где $j = \overline{1..n}$. При этом, каждому пункту хранения A_i ставится в соответствие потенциал α_i, а каждому пункту потребления B_j ставится в соответствие потенциал β_j. При этом, для каждой базисной клетки выполняется равенство $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$. c_{ij} – стоимость перевозки из пункта A_i в пункт B_j.

Алгоритм метода потенциалов

***Шаг* 1. Найти начальный план перевозок методом северо-западного угла или методом минимального элемента.**

***Шаг* 2. Для каждой базисной клетки составить уравнение**

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij}.$$

Так как эти уравнения образуют систему (m+n-1) уравнений с (m+n) неизвестными, то она имеет бесконечно много решений, поэтому для определённости следует положить $\alpha_1=0$. Тогда все остальные потенциалы находятся однозначно.

***Шаг* 3. Для каждой свободной клетки вычислить относительные оценки:**

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j).$$

***Шаг* 4. Проанализировать относительные оценки:**
а) если все относительные оценки неотрицательны, т.е.

$$\Delta_{ij} \geq 0,$$

то задача решена, и следует выписать полученный оптимальный план перевозок из последней матрицы, подсчитать его стоимость;

б) если среди оценок Δ_{ij} есть отрицательные, найти среди них наименьшую отрицательную оценку и пометить знаком $\otimes$.

***Шаг* 5. Для свободной клетки (i, j) с выбранной оценкой Δ_{ij}, помеченной $\otimes$, построить означенный цикл. Все его вершины, кроме расположенной в клетке (i, j), должны находиться в базисных клетках. Свободная клетка берется со знаком "+".**

Замечание: означенный цикл может быть выбран абсолютно произвольно, но , подчиняясь следующим правилам:

1) цикл должен быть замкнут;

2) поворачивать можно только на базисных клетках (т.е. на клетках с заполненными значениями.

***Шаг* 6. Выполнить сдвиг по построенному на шаге 5 циклу на величину θ, равную наименьшему из чисел, стоящих в отрицательных вершинах. При этом числа, стоящие в положительных вершинах, увеличить на θ, а числа, стоящие в отрицательных вершинах, уменьшить на θ.**

Если наименьшее значение θ достигается в нескольких отрицательных вершинах цикла, то при сдвиге следует поставить базисный нуль во всех таких вершинах, кроме одной. Тогда число базисных клеток сохранится и будет равно $(m + n - 1)$, что необходимо проверять при расчетах.

Элементы матрицы, не входящие в цикл, остаются без изменений.

Перейти к шагу 2.

Замечание:

1. При решении задач может возникнуть ситуация, в которой $\theta = 0$. Тогда при сдвиге свободная клетка становится базисной (точка заменяется на базисный нуль).

Пример 13.5. Решить транспортную задачу (табл. 13.6).

Таблица 13.6

Пункты	B_1	B_2	Запасы	
A_1	1 ⊖ 30	2 10 ⊕	40	$\alpha_1 = 0$
A_2	3	2 30	30	$\alpha_2 = 0$
A_3	1 ⊕	4 30 ⊖	30	$\alpha_3 = 2$
Потребности	30	70	100	
	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = 2$		

□ Решаем по алгоритму.

1. Найдем начальный план перевозок методом наименьшего элемента

$x_{11} = \min [40, 30] = 30$; $x_{21} = x_{31} = 0$ (в табл. 13.6 ставятся точки);

$$x_{12} = \min [(40 - 30), 70] = 10,$$

$$x_{22} = \min [30, (70 - 10)] = 30,$$

$$x_{32} = \min [30, (70 - 10 - 30)] = 30.$$

Его стоимость $f = 30 + 20 + 60 + 120 = 230$.

2^1. Найдем потенциалы, составляя для каждой базисной клетки уравнение $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$.

Положим $\alpha_1 = 0$. Тогда для базисных клеток (1,1) и (1,2) получаем

$$\alpha_1 + \beta_1 = 1,$$

$$\alpha_1 + \beta_2 = 2.$$

Отсюда $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$.

Далее для базисных клеток (2,2) и (3,2)

$$\alpha_2 + \beta_2 = 2,$$

$$\alpha_3 + \beta_2 = 4.$$

Отсюда $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 2$.

3^1. Для каждой свободной клетки вычислим относительные оценки:

$$\Delta_{21} = c_{21} - (\alpha_2 + \beta_1) = 3 - (0 + 1) = 2 > 0,$$

$$\Delta_{31} = c_{31} - (\alpha_3 + \beta_1) = 1 - (2 + 1) = -2 < 0. \otimes$$

4^1. Проанализируем относительные оценки. Так как условие окончания $\Delta_{ij} \geq 0$ не выполнено, то найдем наименьшую отрицательную оценку: Δ_{31}.

5^1. Для клетки (3,1) построим означенный цикл. Все его вершины, кроме данной, находятся в базисных клетках. Знак "+" ставится в свободной клетке (3,1).

6^1. Найдем число $\theta = \min[30, 30] = 30$, равное наименьшему из чисел, стоящих в отрицательных вершинах цикла. Выполним сдвиг по циклу на число $\theta = 30$: числа, стоящие в положительных вершинах, увеличиваются на 30, а числа, стоящие в отрицательных вершинах, уменьшаются на 30. Так как наименьшее значение $\theta = 30$ достигается в двух отрицательных вершинах, то в клетку (3,2) ставится точка, а в клетку (1,1) с наименьшей стоимостью - базисный нуль.

Элементы матрицы, не входящие в цикл, остаются без изменений. Результат сдвига представлен в табл. 13.7. Перейдем к шагу 2.

Таблица 13.7

Пункты	B_1	B_2	Запасы	
A_1	1 **0**	2 40	40	$\alpha_1 = 0$
A_2	3 •	2 30	30	$\alpha_2 = 0$
A_3	1 30	4 •	30	$\alpha_3 = 0$
Потребности	30	70	100	
	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = 2$		

2^2. Найдем потенциалы. Для базисных клеток (1,1) и (1,2) получаем

$$\alpha_1 + \beta_1 = 1,$$

$$\alpha_1 + \beta_2 = 2.$$

Поскольку $\alpha_1 = 0$, то $\beta_1 = 1, \beta_2 = 2$.

Для базисной клетки (2,2) имеем $\alpha_2 + \beta_2 = 2$, откуда $\alpha_2 = 0$. Для базисной клетки (3,1) $\alpha_3 + \beta_1 = 1$. Отсюда $\alpha_3 = 0$.

3^2. Для каждой свободной клетки вычислим относительные оценки:

$$\Delta_{21} = c_{21} - (\alpha_2 + \beta_1) = 3 - (0 + 1) = 2 > 0,$$

$$\Delta_{32} = c_{32} - (\alpha_3 + \beta_2) = 4 - (0 + 2) = 2 > 0.$$

4^2. Поскольку все $\Delta_{ij} \geq 0$, задача решена. Оптимальный план перевозок:

$$x_{11} = 0, \quad x_{12} = 40,$$

$$x_{21} = 0, \quad x_{22} = 30,$$

$$x_{31} = 30, \quad x_{32} = 0$$

имеет суммарную стоимость $f = 80 + 60 + 30 = 170$.■

Задачи для самостоятельного решения

Решить транспортные задачи, заданные матрицами перевозок.

1.

Пункты	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	1	2	4	1	50
A_2	2	3	1	5	30
A_3	3	2	4	4	10
Потребности	30	30	10	20	90

Ответ: $x^* = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.

Пункты	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	2	3	4	3	90
A_2	5	3	1	2	30
A_3	2	1	4	2	40
Потребности	70	30	20	40	160

Ответ: $x^* = \begin{pmatrix} 70 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 20 & 10 \\ 0 & 30 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

5.

Пункты	B_1	B_2	B_3	Запасы
A_1	1	2	4	90
A_2	1	3	4	30
A_3	2	2	3	40
Потребности	50	60	10	120

Ответ: $x^* = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 40 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 10 \end{pmatrix}$.