ЛЕКЦИЯ 4

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

1. Позиционные и непозиционные системы счисления
2. Методы перевода чисел
3. Двоичная арифметика

1.Позиционные и непозиционные системы счисления

Определение 1.**Система счисления** - совокупность приемов и правил для записи чисел цифровыми знаками.

Наиболее известна десятичная система счисления, в которой для записи чисел используются цифры 0, 1, … , 9.

Способов записи чисел цифровыми знаками существует бесчисленное множество.

В зависимости от способов изображения чисел цифрами, системы счисления делятся на непозиционные и позиционные.

Определение 2:

Непозиционная система счисления – система, для которой значение символа не зависит от его положения в числе.

Для ее образования используют в основном операции сложения и вычитания. Например, система с одним символом-палочкой встречалась у многих народов. Для изображения какого-то числа в этой системе нужно записать количество палочек, равное данному числу. Эта система неэффективна, так как запись числа получается длинной.

Другим примером непозиционной системы счисления является римская

система, использующая набор следующих символов: I, V, X, L, C, D, M и т. д. В этой системе существует отклонение от правила независимости значения цифры от положения в числе. В числах LX и XL символ X принимает два различных значения: +10 – в первом случае и –10 – во втором случае

римские цифры

1	I	лат. *unus, unum*
5	V	лат. *quinque*
10	X	лат. *decem*
50	L	лат. *quinquaginta*
100	C	лат. *centum*
500	D	лат. *quingenti*
1000	M	лат. *mille*

В русском языке для закрепления в памяти буквенных обозначений цифр в порядке убывания существуют мнемонические правила:

Мы **D**аем **С**оветы **L**ишь **Х**орошо **V**оспитанным **I**ндивидуумам

Соответственно **M, D, C, L, X, V, I**

Число	**Обозначение**
0	—
1	I
2	II
3	III
4	IV, до XIX века — IIII
5	V
6	VI
7	VII
8	VIII (иногда — IIX)
9	IX (иногда-VIIII)
10	X
20	XX
30	XXX
40	XL
50	L
60	LX
70	LXX
80	LXXX
90	XC
100	C
200	CC
300	CCC
400	CD

Число	**Обозначение**
500	D
600	DC
700	DCC
800	DCCC
900	CM
1 000	M
2 000	MM
3 000	MMM
3 999	MMMCMXCIX

Определение 3: **Позиционная система счисления** – система, в которой значение символа определяется его положением в числе: один и тот же знак принимает различное значение (арабская система счисления).

Например, в десятичном числе 222 первая цифра справа означает 2, соседняя с ней – 20, а левая – 200.

Любая позиционная система характеризуется основанием. Основание (базис) позиционной системы счисления – количество знаков или символов, используемых для изображения числа в данной системе.

Позиционные системы счисления имеют ряд преимуществ перед непозиционными: удобство выполнения арифметических и логических операций, а также представление больших чисел, поэтому в цифровой технике применяются позиционные системы счисления.

Запись чисел в непозиционных системах счисления может быть представлена в виде:

$$A_{(D)} = D_1 + D_2 + ... + D_k = \sum_{i=1}^{k} D_i,$$

где:

$A_{(D)}$ - запись числа A в системе счисления D;

D_i - символ системы, образующий базу.

По этому принципу построены непозиционные системы счисления.

В общем случае запись любого смешанного числа в позиционной системе счисления с основанием q будет иметь следующий вид:

$$A_q = a_{n-1} \cdot q^{n-1} + a_{n-2} \cdot q^{n-2} + \ldots + a_0 \cdot q^0 + a_{-1} \cdot q^{-1} + a_{-2} \cdot q^{-2} + \ldots + a_{-m} \cdot q^{-m} \quad ...(1)$$

Здесь A_q – само число,

q – основание системы счисления,

a_i – цифры данной системы счисления,

n – число разрядов целой части числа,

m – число разрядов дробной части числа.

Пример:

$975{,}48_{10}=9*10^2+7*10^1+5*10^0+4*10^{-1}+8*10^{-2}$

Рассмотрим наиболее часто используемые позиционные системы счисления

q	Название	Цифры
2	двоичная	0, 1
8	восьмеричная	0, ... , 7
16	шестнадцатеричная	0, ... , 9 , A, ... , F

Каждая система счисления имеет свои правила арифметики (таблица умножения, сложения). *Поэтому, производя какие-либо операции над числами, надо помнить о системе счисления, в которой они представлены*.

Если основание системы q превышает 10, то цифры, начиная с 10, при записи обозначают прописными буквами латинского алфавита: A,B,...,Z. При этом цифре 10 соответствует знак 'A', цифре 11 - знак 'B' и т.д.

Рассмотрим запись одних и тех же чисел в различных системах счисления.

q=10	q=2	q=8	q=16		q=10	q=2	q=8	q=16
0	0	0	0		8	1000	10	8
1	1	1	1		9	1001	11	9
2	10	2	2		10	1010	12	A
3	11	3	3		11	1011	13	B
4	100	4	4		12	1100	14	C
5	101	5	5		13	1101	15	D
6	110	6	6		14	1110	16	E

7	111	7	7		15	1111	17	F
					16	10000	20	10

2. Методы перевода чисел.

Число в любой позиционной системе счисления может быть представлено как

$$A_q = a_{n-1} \cdot q^{n-1} + a_{n-2} \cdot q^{n-2} + \ldots + a_0 \cdot q^0 + a_{-1} \cdot q^{-1} + a_{-2} \cdot q^{-2} + \ldots + a_{-m} \cdot q^{-m}$$

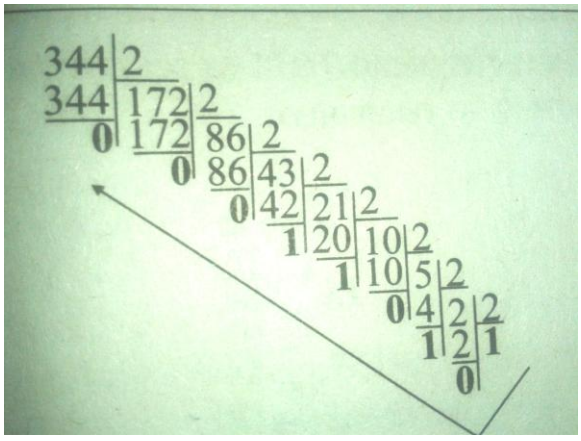
(смотри формулу ...1)

Значит, в общем виде задачу перевода числа из системы счисления с основанием q_1 в систему счисления с основанием q_2 можно представить как задачу определения коэффициентов b_j нового ряда, изображающего число в системе с основанием q_2. В такой постановке задачу перевода можно решить подбором коэффициентов b_j.

Перевод чисел из десятичной системы счисления

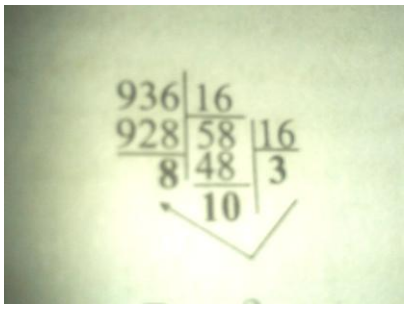
1. Для того, **чтобы перевести целое десятичное число** в другую систему счисления, необходимо осуществлять последовательное деление десятичного числа и затем получаемых целых частных на основание той системы, в которую оно переводится, до тех пор, пока не получится частное, меньшее, чем делитель. Число в новой системе записывается в виде остатков от деления, начиная с последнего.

Пример. Переведите число 344 из десятичной в двоичную систему счисления.



Ответ 101011000_2

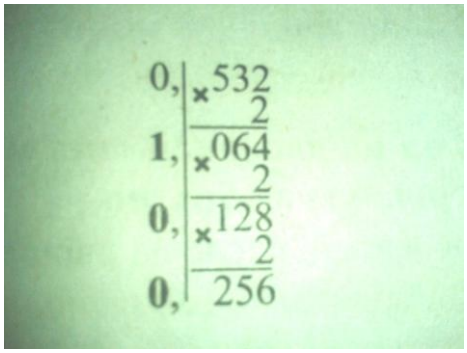
Пример Переведите число 936 из десятичной в восьмиричную систему счисления



Ответ: $3A8_{16}$

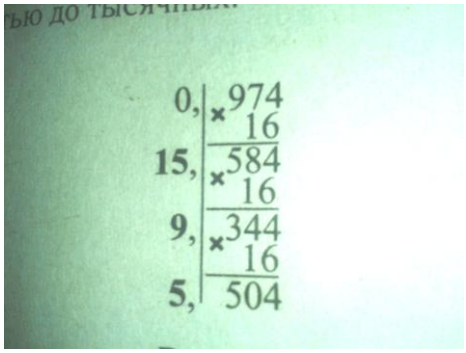
2. Для того, чтобы перевести **правильную десятичную дробь** из десятичной системы счисления в другую, необходимо последовательно умножать эту дробь, а затем и получаемые дробные части на основание новой системы счисления. Умножение продолжается до тех пор, пока дробная часть не станет равна нулю, или не будет достигнута требуемая точность. В новой системе дробь записывается в виде целых частей произведений, начиная с первого

Пример. Переведите число 0,532 из десятичной системы в двоичную с точностью до тысячных



Ответ:$0,100_2$

Пример: Перевести из десятичной в шестнадцатеричную систему дробь 0,974



Ответ: $0,F95_{16}$

3. Для того, чтобы перевести число, содержащее и целую, и дробную части, из десятичной системы в другую, необходимо сначала перевести его целую часть, затем отдельно дробную часть. В ответе перед запятой следует записать целую часть, а после запятой дробную часть.

Пример: Переведите число 344,532 из десятичной системы в двоичную с точностью до тысячных

Решение:
См. соответствующие примеры
Ответ: $101011000,100_2$

Пример: Переведите число 936,974 из десятичной системы в шестнадцатеричную с точностью до тысячных

Решение
См. соответствующие примеры

Ответ: $3A8,F95_{16}$

Перевод чисел в десятичную систему счисления

Для того, чтобы перевести число в десятичную систему счисления, можно воспользоваться формулой ...(1), т.е. составить сумму степенного ряда с основанием системы, в которой записано число, а затем найти значение этой суммы

Пример: Перевести число 110110,01 из двоичной системы в десятичную.

Решение:

$110110{,}01_2 = 1*2^5 + 1*2^4 + 0*2^3 + 1*2^2 + 1*2^1 + 0*2^0 + 0*2^{-1} + 1*2^{-2} =$
$=32+16+4+2+0{,}25=54{,}25_{10}$

Пример: Перевести число A2F,A из шестнадцатеричной системы в десятичную.

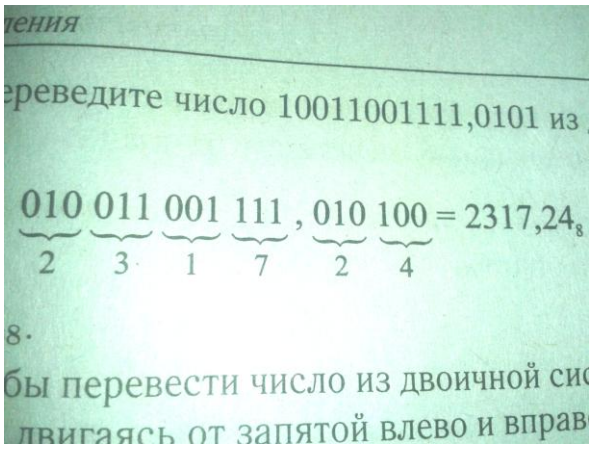
Решение

$A2F{,}A_{16}=10*16^2+2*16^1+15*16^0+10*16^{-1}=2500+32+15+0{,}25=2607{,}25_{10}$

Перевод чисел из двоичной системы счисления в восьмеричную и шестнадцатеричную и обратно

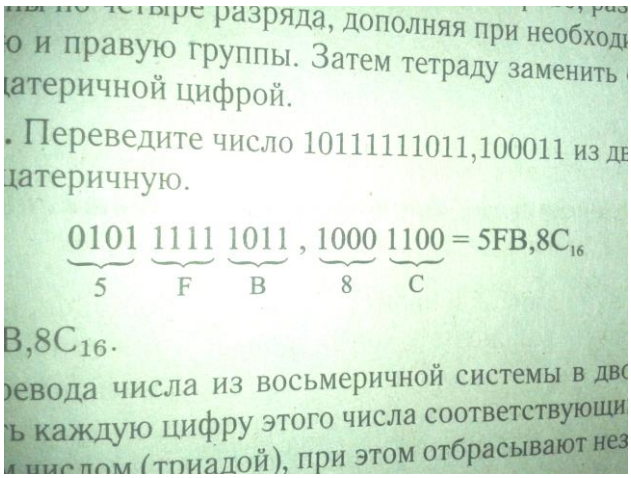
1. Для того, чтобы перевести число из 2-ичной системы в 8-ричную, необходимо, двигаясь от запятой влево и вправо, разбить двоичное число на группы по 3 разряда, дополняя при необходимости нулями крайние левую и правую группы. Затем каждую триаду заменить соответствующей восьмеричной цифрой

Пример:

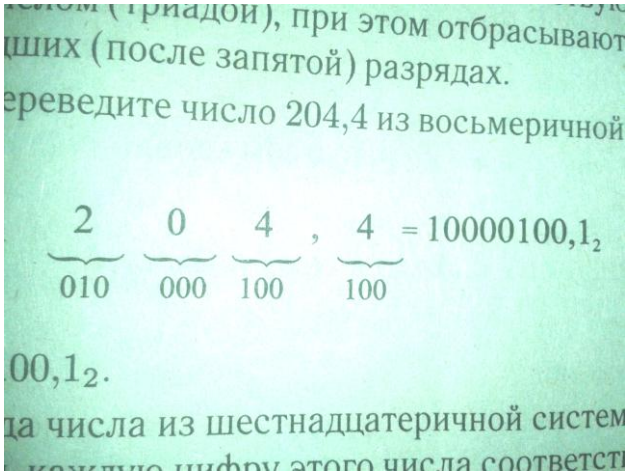


2. Для того, чтобы перевести число из 2-ичной системы в 16-ричную, необходимо, двигаясь от запятой влево и вправо, разбить двоичное число на группы по 4 разряда, дополняя при необходимости нулями крайние левую и правую группы. Затем каждую тетраду заменить соответствующей шестнадцатеричной цифрой

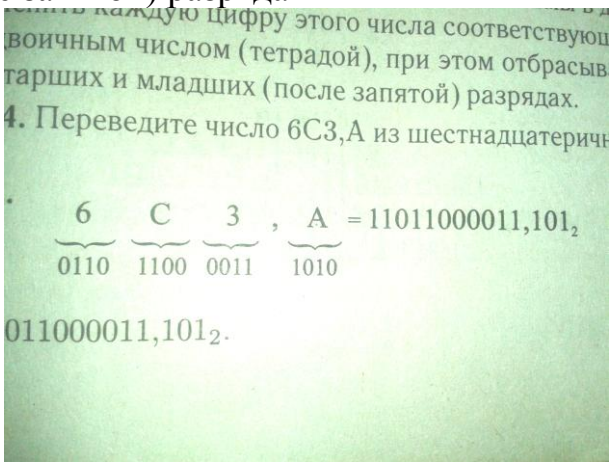
Пример:



3. Для перевода числа из 8-ричной в 2-ичную достаточно заменить каждую цифру этого числа соответствующим трёхразрядным двоичным числом. При этом отбрасывают незначащие нули в старших и младших (после запятой) разрядах



4. Для перевода числа из 16-ричной в 2-ичную достаточно заменить каждую цифру этого числа соответствующим четырёхразрядным двоичным числом. При этом отбрасывают незначащие нули в старших и младших (после запятой) разрядах



3. Двоичная арифметика

СЛОЖЕНИЕ.

Для того чтобы выполнить сложение двух чисел, записанных в двоичной системе счисления, достаточно знать простейшую таблицу сложения:

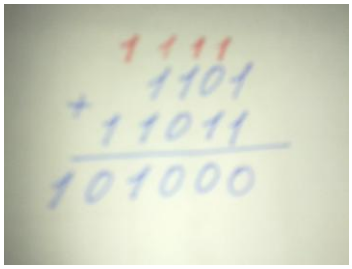
+	0	1
0	0	1
1	1	10

0+0=0 0+1=1 1+0=1 1+1=10

Последняя сумма представляет собой двузначное число. Это следует понимать как перенос одной двоичной единицы в соседний старший разряд.

Правила арифметики во всех позиционных системах счисления аналогичны. Для выполнения сложения запишем числа столбиком так, чтобы соответствующие разряды чисел оказались друг под другом.

Пример. Сложить двоичные числа 1101_2 и 11011_2.



Для проверки определим полные значения слагаемых и результата:

$1101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13;$

$11011_2 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 8 + 0 + 2 + 1 = 27;$

Поскольку 13 + 27 = 40, двоичное сложение выполнено верно.

Сложение в других позиционных системах счисления производится аналогично

Составим шестнадцатеричную таблицу сложения

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

Пример. Сложить шестнадцатеричные числа $1C_{16}$ и $7B_{16}$.

```
    1
+   1   C
    7   B
-------------
    9   7
```

Для проверки определим полные значения слагаемых и результата:

$1C_{16} = 1 \cdot 16^1 + 12 \cdot 16^0 = 16 + 12 = 28;$

$7B_{16} = 7 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 = 112 + 11 = 123;$

$97_{16} = 9 \cdot 16^1 + 7 \cdot 16^0 = 144 + 7 = 151.$

Поскольку 28 + 123 = 151, сложение выполнено верно.

ВЫЧИТАНИЕ

Вычитание в любой позиционной системе выполняется аналогично вычитанию в десятичной системе счисления. При необходимости, когда в некотором разряде приходится вычитать из нуля, занимается единица из следующего старшего разряда. Если в следующем разряде нуль, то заем делается в ближайшем старшем разряде, в котором стоит единица.

Пример. Вычесть из двоичного числа 101_2 двоичное число 11_2.

```
    •  10
    1  0   1
-       1   1
-------------
       1   0
```

Проверяем:
$101_2 = 5$;
$11_2 = 3$;
$10_2 = 2$.
Поскольку 5 - 3 = 2, вычитание выполнено верно.

Пример.

	•	1	10	
	1	0	0	1
-			1	1
		1	1	0

Пример. Вычесть из шестнадцатеричного числа 97_{16} шестнадцатеричное число $7B_{16}$.

		17
	9	7
-	7	B
	1	C

УМНОЖЕНИЕ

Выполняя умножение многозначных чисел в различных позиционных системах счисления, можно использовать обычный алгоритм перемножения чисел в столбик, но при этом результаты перемножения и сложения однозначных чисел необходимо заимствовать из соответствующих рассматриваемой системе таблиц умножения и сложения.

Умножение в двоичной системе

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Умножение в восьмеричной системе

*	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Ввиду чрезвычайной простоты таблицы умножения в двоичной системе, умножение сводится лишь к сдвигам множимого и сложениям.

Пример 7. Перемножим числа 5 и 6.

Десятичная: $5_{10} \bullet 6_{10}$ **Двоичная:** $101_2 \bullet 110_2$ **Восьмеричная:** $5_8 \bullet 6_8$

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times\ 6 \\ \hline 30 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 101 \\ \times\ 110 \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline 11110 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5 \\ \times\ 6 \\ \hline 36 \end{array}$$

Ответ: $5 \cdot 6 = 30_{10} = 11110_2 = 36_8$.

Проверка. Преобразуем полученные произведения к десятичному виду:
$11110_2 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 = 30$;
$36_8 = 3 \quad 8^1 + 6 \quad 8^0 = 30$.

Пример 8. Перемножим числа 115 и 51.

Десятичная: $115_{10} \bullet 51_{10}$ **Двоичная:** $1110011_2 \bullet 110011_2$ **Восьмеричная:** $163_8 \bullet 63_8$

$$\begin{array}{r} 115 \\ \times\ 51 \\ \hline 115 \\ 575 \\ \hline 5865 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1110011 \\ \times\ 110011 \\ \hline 1110011 \\ 1110011 \\ 1110011 \\ \hline 1011011101001 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 163 \\ \times\ 63 \\ \hline 531 \\ 1262 \\ \hline 13351 \end{array}$$

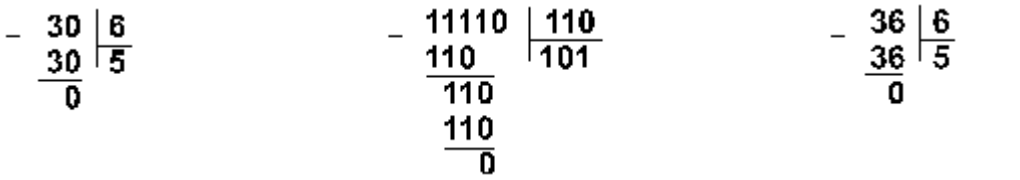
Ответ: $115 \cdot 51 = 5865_{10} = 1011011101001_2 = 13351_8$.
Проверка. Преобразуем полученные произведения к десятичному виду:
$1011011101001_2 = 2^{12} + 2^{10} + 2^9 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^0 = 5865$;
$13351_8 = 1 \cdot 8^4 + 3 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 = 5865$.

ДЕЛЕНИЕ

Деление в любой позиционной системе счисления производится по тем же правилам, как и деление углом в десятичной системе. В двоичной системе деление выполняется особенно просто, ведь очередная цифра частного может быть только нулем или единицей.

Пример 9. Разделим число 30 на число 6.

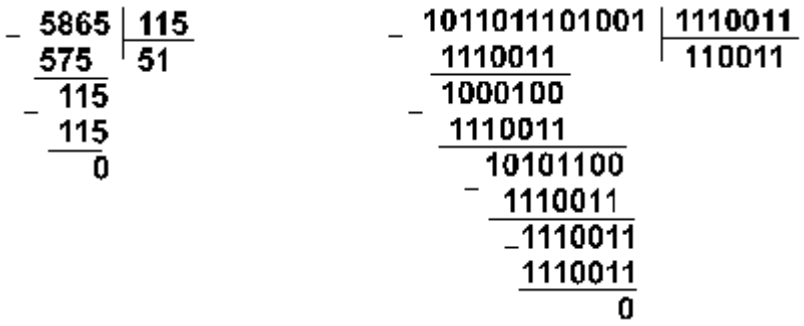
Десятичная: $30_{10} : 6_{10}$ **Двоичная:** $11110_2 : 110_2$ **Восьмеричная:** $36_8 : 6_8$



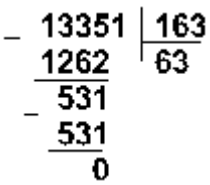
Ответ: $30 : 6 = 5_{10} = 101_2 = 5_8$.

Пример 10. Разделим число 5865 на число 115.

Десятичная: $5865_{10} : 115_{10}$ **Двоичная:** $1011011101001_2 : 1110011_2$



Восьмеричная: $13351_8 : 163_8$



Ответ: $5865 : 115 = 51_{10} = 110011_2 = 63_8$.

Проверка. Преобразуем полученные частные к десятичному виду: $110011_2 = 2^5 + 2^4 + 2^1 + 2^0 = 51$; $63_8 = 6 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 51$.

Пример 11. Разделим число 35 на число 14.

Десятичная: $35_{10} : 14_{10}$ **Двоичная:** $100011_2 : 1110_2$

```
 35 | 14
 28 | 2,5
 70
 70
  0
```

```
 100011 | 1110
 1110   | 10,1
   1110
   1110
      0
```

Восьмеричная: $43_8 : 16_8$

```
 43 | 16
 34 | 2,4
 70
 70
  0
```

Ответ: $35 : 14 = 2,5_{10} = 10,1_2 = 2,4_8$.

Проверка. Преобразуем полученные частные к десятичному виду:

$10,1_2 = 2^1 + 2^{-1} = 2,5$;

$2,4_8 = 2 \cdot 8^0 + 4 \cdot 8^{-1} = 2,5$.

СРС$_2$ Составить шестнадцатеричную таблицу умножения.