Глава 2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

2.1. Векторы на плоскости и в пространстве

Вектором (геометрическим вектором) называется направленный отрезок, т.е. отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой концом. При этом любые два направленных отрезка считаются равными, если они имеют одинаковые длину и направление. Таким образом, начало вектора можно помещать в любую точку пространства.

Если начало вектора находится в точке A, а конец – в точке B, то вектор обозначают $\overrightarrow{AB}$. Векторы также принято обозначать строчными буквами латинского алфавита со стрелкой над ними: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \ldots$.

Длиной вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB, обозначается $|\overrightarrow{AB}|$. Вектор, длина которого равна 0, называется нулевым и обозначается $\vec{0}$. Нулевой вектор направления не имеет.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными*, если они параллельны одной и той же прямой. Если при этом векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют одинаковое направление, то они называются *сонаправленными*.

Три вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ называются *компланарными*, если они параллельны одной и той же плоскости.

Углом между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется наименьший из двух углов, образуемых этими векторами при совмещении их начал (рис.2.1), обозначается $\alpha = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *ортогональными* (перпендикулярными), если $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90^\circ$.

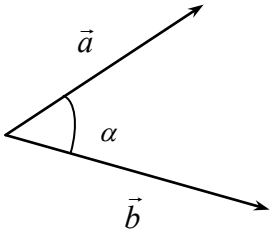

Рис.2.1

Произведением вектора $\vec{a}$ *на число* λ называется вектор, обозначаемый $\lambda\vec{a}$, длина которого равна $|\lambda||\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно ему, если $\lambda < 0$. Таким образом, векторы $\vec{a}$ и $\lambda\vec{a}$ коллинеарны. Справедливо и обратное утверждение: если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то они связаны равенством $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, где λ – некоторое число.

Суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ называется вектор $\overrightarrow{AC}$ (рис.2.2). Это определение называют *правилом треугольника* сложения векторов.

Сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a}+\vec{b}$.

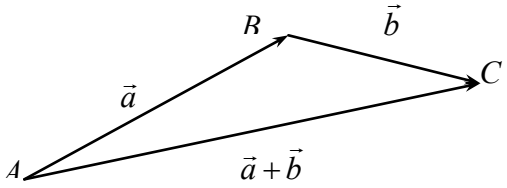

Рис.2.2

Сложение нескольких векторов выполняется по *правилу многоугольника*:

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}.$$

Для сложения двух неколлинеарных векторов применяют также правило параллелограмма: суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ является вектор $\overrightarrow{AC}$, где точка C – вершина параллелограмма $ABCD$ (рис.2.3).

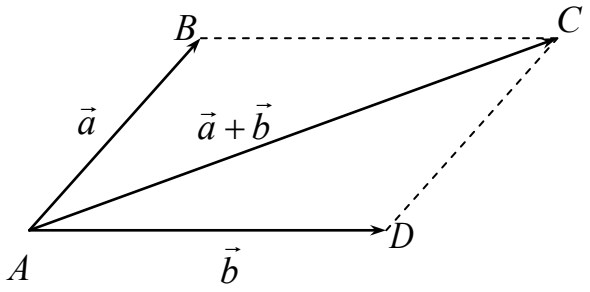

Рис.2.3

Пример 2.1. В треугольнике ABC даны стороны $AB=2$, $AC=3$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены с векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ соответственно и $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$. Точка E – середина стороны BC. Выразить векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AE}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Р е ш е н и е. По правилу треугольника имеем

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=-3\vec{b}+2\vec{a}.$$

Для того чтобы выразить вектор $\overrightarrow{AE}$, построим параллелограмм $ABDC$ (рис.2.4). По правилу параллелограмма $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\vec{a}+3\vec{b}$. Так как диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам, имеем $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)=\vec{a}+1{,}5\vec{b}$.

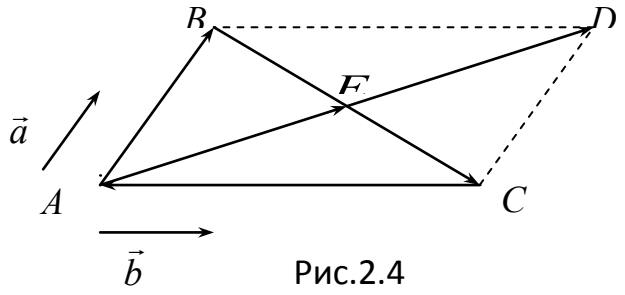

Рис.2.4

Если вектор $\vec{a}$ может быть представлен в виде *линейной комбинации векторов* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$, т.е.

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + ... + \lambda_n \vec{a}_n,$$

где λ_i, $i = 1,...,n$, – некоторые числа, то говорят, что вектор $\vec{a}$ линейно выражается через векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$.

Базисом на плоскости называются любые два неколлинеарных вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, взятые в определенном порядке. Любой компланарный с базисными векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ вектор $\vec{a}$ можно представить, и притом единственным образом, в виде их линейной комбинации:

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2. \qquad (2.1)$$

Числа x и y в правой части равенства (2.1) называются *координатами* вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

Базисом в пространстве называются любые три некомпланарных вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, взятые в определенном порядке. Любой вектор $\vec{a}$ можно представить, и притом единственным образом, в виде их линейной комбинации:

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3, \qquad (2.2)$$

где x, y, z – координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Равенство (2.1) называется *разложением вектора* $\vec{a}$ *по базису* на плоскости, а равенство (2.2) – *разложением вектора* $\vec{a}$ *по базису* в пространстве.

Координаты вектора обычно записывают в круглых скобках после буквенного обозначения вектора. Например, запись $\vec{a}(2;-1;3)$ означает, что вектор $\vec{a}$ имеет координаты $2, -1$ и 3 в выбранном базисе.

Два вектора, заданные координатами в фиксированном базисе, равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты.

При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число. При сложении двух векторов складываются их соответствующие координаты.

Пример 2.2. При каком значении y векторы $\vec{a}(3;-2;5)$ и $\vec{b}(-6;y;-10)$ коллинеарны?

Р е ш е н и е. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если существует такое число λ, что выполняется равенство $\vec{a}=\lambda\vec{b}$. Приравнивая соответствующие координаты векторов $\vec{a}$ и $\lambda\vec{b}(-6\lambda;\lambda y;-10\lambda)$, получим:

$$\begin{cases} 3=-6\lambda, \\ -2=\lambda y, \\ 5=-10\lambda, \end{cases}$$

отсюда находим, что $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ и $y=4$.

Базис называется *ортонормированным*, если базисные векторы попарно ортогональны и имеют длину, равную единице. Векторы ортонормированного базиса на плоскости обозначают $\vec{i},\vec{j}$, а в пространстве – $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. Если при указании координат вектора не дается ссылка на конкретный базис, то по умолчании считают базис ортонормированным.

Декартовой системой координат называется совокупность фиксированной точки O, называемой началом координат, и базиса $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$. Декартова система координат с ортонормированным базисом называется *прямоугольной* (рис.2.5).

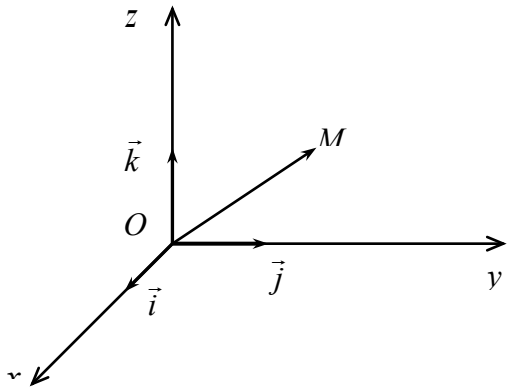

Рис.2.5

Прямые, походящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются *координатными осями*. Прямая Ox называется *осью абсцисс*, прямая Oy – *осью ординат*, прямая Oz – *осью аппликат*.

Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M. *Координатами точки* M в рассматриваемой системе координат называются координаты ее радиус-вектора. Первая координата называется *абсциссой*, вторая – *ординатой*, третья – *аппликатой*.

Длина вектора $\vec{a}(x;y;z)$, заданного своими координатами в ортонормированном базисе, определяется равенством

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ .$$

Если в декартовой системе координат даны две точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$, то вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ в соответствующем базисе имеет координаты $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$, а расстояние между точками M_1 и M_2 (длина вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$) находится по формуле

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ . \qquad (2.3)$$

Разделить отрезок M_1M_2 *в отношении* λ означает найти точку $M(x;y;z)$, принадлежащую данному отрезку, удовлетворяющую условию $\left|\overrightarrow{M_1M}\right| = \lambda\left|\overrightarrow{MM_2}\right|$. Координаты такой точки вычисляются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda};\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}\ . \qquad (2.4)$$

При $\lambda = 1$ точка M делит отрезок M_1M_2 пополам и формулы (2.4) определяют координаты середины отрезка:

$$x_{cp} = \frac{x_1 + x_2}{2};\quad y_{cp} = \frac{y_1 + y_2}{2};\ z_{cp} = \frac{z_1 + z_2}{2}\ .$$

Пример 2.3. Даны вершины $A(1;-2)$, $B(-2;4)$, $C(5;-6)$ треугольника ABC. Точка K делит сторону AB в отношении $2:1$, считая от вершины A. Найти длину отрезка KC.

Р е ш е н и е. Так как $AK:KB = 2:1$, то координаты точки K найдем по формулам (2.4) при $\lambda = 2$:

$$x_K = \frac{1+2\cdot(-2)}{1+2} = -1, \quad y_K = \frac{-2+2\cdot 4}{1+2} = 2,$$

т.е. $K(-1;2)$. Длину отрезка KC найдем по формуле (2.3)

$$\left|\overrightarrow{KC}\right| = \sqrt{\left(5-(-1)\right)^2 + (-6-2)^2} = 10.$$

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Изобразить два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и построить векторы:

а) $\vec{a}+2\vec{b}$; б) $3\vec{a}-\vec{b}$; в) $-\frac{1}{2}\vec{a}+3\vec{b}$.

2.2. Дан параллелограмм $ABCD$ и два вектора $\vec{p}$ и $\vec{q}$ таких, что $\overrightarrow{AB}=4\vec{p}$, а $\overrightarrow{AD}=3\vec{q}$. Точки M и N – середины сторон BC и CD соответственно. Выразить через векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$: а) векторы $\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}$; б) векторы $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN},\overrightarrow{MN}$.

2.3. В треугольнике ABC отрезок AE – медиана, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}, \vec{b}=\overrightarrow{AC}, \vec{c}=\overrightarrow{AE}$. Разложить геометрически и аналитически: а) вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$; б) вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

2.4. В параллелограмме $ABCD$ точки M и N – середины сторон BC и CD соответственно. Разложить геометрически и аналитически вектор $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{AM}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AN}$.

2.5. В трапеции $ABCD$ имеем $BC \| AD$ и $BC:AD=1:3$. Выразить вектор $\vec{c}=\overrightarrow{CD}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$.

2.6. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке O. Выразить векторы $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$. Проверить справедливость равенства $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

2.7. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Выразить векторы $\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{BD_1},\overrightarrow{B_1D}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}, \vec{b}=\overrightarrow{AD}$ и $\vec{c}=\overrightarrow{AA_1}$.

2.8. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Прямые AC и BD пересекаются в точке O. Выразить векторы $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OB_1}, \overrightarrow{OC_1}$ и $\overrightarrow{OD_1}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}, \vec{b}=\overrightarrow{AD}, \vec{c}=\overrightarrow{AA_1}$.

2.9. При каком значении x векторы $\vec{a}(x;2;-4)$ и $\vec{b}(3;-6;12)$ коллинеарны?

2.10. Даны точки $M(0;3)$, $N(2;1)$, $P(5;-1)$, $Q(9;-3)$. Доказать, что четырехугольник $MNPQ$ является трапецией.

2.11. Даны координаты трех вершин параллелограмма $ABCD$: $A(1;2)$, $B(3;7)$, $D(8;-1)$. Найти координаты вершины C.

2.12. Даны координаты двух вершин треугольника ABC: $A(1;2)$, $B(3;4)$. Отрезок AE – медиана треугольника и $\overrightarrow{AE}(4;-1)$. Найти координаты вершины C.

2.13. Найти положительное значение координаты x вектора $\vec{a}(x;-3;4)$, если $|\vec{a}|=5\sqrt{2}$.

2.14. Найти диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{m}(3;4;-2)$ и $\vec{n}(-1;2;5)$.

2.15. Найти длину стороны BC треугольника ABC, если $\overrightarrow{AB}(1;-1;2)$, $\overrightarrow{AC}(7;2;4)$.

2.16. Даны точки $A(2;3;-1)$, $B(8;12;-4)$. Найти координаты: а) середины отрезка AB; б) точек, делящих отрезок AB на три равные части.

2.17. Даны вершины $A(4;-1)$, $B(5;5)$, $C(-3;1)$ треугольника ABC. Найти медиану, проведенную из вершины A.

2.18. На отрезке AB выбрана точка E так, что $AE:EB=1:4$. Найти координаты точки B, если $A(1;-2;5)$, $E(3;-1;1)$.

2.19. Разложить вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если:

а) $\vec{a}(2;-5)$, $\vec{p}(1;3)$, $\vec{q}(2;5)$; б) $\vec{a}(4;5)$, $\vec{p}(3;2)$, $\vec{q}(2;1)$.

2.20. Разложить вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$, если:

а) $\vec{a}(6;1;4)$, $\vec{p}(4;5;1)$, $\vec{q}(3;2;1)$, $\vec{r}(2;3;2)$;

б) $\vec{a}(10;-1;0)$, $\vec{p}(3;1;-1)$, $\vec{q}(2;-1;2)$, $\vec{r}(3;2;1)$.

2.2. Проекция вектора на ось. Скалярное произведение векторов

Проекцией вектора $\vec{a}$ *на ось* Ox называется число, обозначаемое $\text{Пр}_{Ox}\vec{a}$ и определяемое формулой

$$\text{Пр}_{Ox}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi,$$

где φ – угол между вектором $\vec{a}$ и осью Ox.

Координаты вектора $\vec{a}$ в ортонормированном базисе равны проекциям вектора $\vec{a}$ на соответствующие координатные оси:

$$x = \text{Пр}_{Ox}\vec{a},\ y = \text{Пр}_{Oy}\vec{a},\ z = \text{Пр}_{Oz}\vec{a}. \qquad (2.5)$$

Косинусы углов $\alpha = (\widehat{\vec{a},\vec{i}}),\ \beta = (\widehat{\vec{a},\vec{j}}),\ \gamma = (\widehat{\vec{a},\vec{j}})$ называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$. Формулы (2.5) можно переписать в виде

$$x = |\vec{a}|\cos\alpha,\ y = |\vec{a}|\cos\beta,\ z = |\vec{a}|\cos\gamma. \qquad (2.6)$$

Направляющие косинусы вектора $\vec{a}$ связаны соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (2.7)$$

Пример 2.4. Вектор $\vec{a}$ образует углы $\alpha = 120^\circ$ и $\beta = 60^\circ$ с осями Ox и Oy соответственно. Найти: а) угол γ, который образует вектор $\vec{a}$ с осью Oz, если известно, что он острый; б) координаты вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = 6$.

Р е ш е н и е : а) из формулы (2.7) находим

$$\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Так как угол γ – острый, то $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, и $\gamma = 45^\circ$;

б) координаты вектора $\vec{a}$ найдем по формулам (2.6):

$$x = 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -3,\ y = 6\cdot\frac{1}{2} = 3,\ z = 6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}.$$

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, обозначаемое $(\vec{a},\vec{b})$ и определяемое формулой

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}). \qquad (2.8)$$

Основные *свойства скалярного произведения* векторов:

1) $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$;

2) $(\lambda\vec{a},\vec{b})=(\vec{a},\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a},\vec{b})$;

3) $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c})=(\vec{a},\vec{c})+(\vec{b},\vec{c})$;

4) $\vec{a}^2=(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|^2$;

5) $(\vec{a},\vec{b})=0 \Leftrightarrow \vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны (при условии $|\vec{a}|\neq 0\neq|\vec{b}|$).

Из определения скалярного произведения следует, что

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}. \qquad (2.9)$$

Проекция вектора $\vec{a}$ на ось, сонаправленную с вектором $\vec{b}$, может быть найдена по формуле

$$\text{Пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|}. \qquad (2.10)$$

Если векторы $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$ заданы координатами в ортонормированном базисе, то

$$(\vec{a},\vec{b})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \qquad (2.11)$$

Пример 2.5. Найти угол между векторами $\vec{a}(4;-1;-1)$ и $\vec{b}(2;-2;1)$.

Р е ш е н и е. Согласно формулам (2.9) и (2.11),

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{4\cdot 2-1\cdot(-2)-1\cdot 1}{\sqrt{16+1+1}\,\sqrt{4+4+1}}=\frac{9}{9\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

отсюда $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\pi}{4}$.

Пример 2.6. Найти длину вектора $\vec{a}=2\vec{p}-3\vec{q}$, если $|\vec{p}|=3$, $|\vec{q}|=2$, $(\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\dfrac{\pi}{3}$.

Р е ш е н и е. Используя свойство 4) скалярного произведения, имеем

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}=\sqrt{(2\vec{p}-3\vec{q})^2}.$$

Применяя далее свойства 1) – 3), находим

$$(2\vec{p}-3\vec{q})^2 = 4\vec{p}^{\,2} - 12(\vec{p},\vec{q}) + 9\vec{q}^{\,2} = 4|\vec{p}|^2 - 12|\vec{p}||\vec{q}|\cos(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) + 9|\vec{q}|^2 =$$

$$= 4\cdot 9 - 12\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{1}{2} + 9\cdot 4 = 36.$$

Следовательно, $|\vec{a}| = 6$.

Пример 2.7. Найти вектор единичной длины, ортогональный векторам $\vec{m}(2;-1;-2)$ и $\vec{n}(1;1;-4)$.

Р е ш е н и е. По свойству 5) скалярного произведения для любого вектора $\vec{p}(x;y;z)$, ортогонального векторам $\vec{m}$ и $\vec{n}$, выполняются равенства $(\vec{p},\vec{m}) = 0$ и $(\vec{p},\vec{n}) = 0$. Кроме того, по условию $|\vec{p}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 1$. Выражая скалярные произведения векторов через их координаты, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = 0, \\ x + y - 4z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \end{cases}$$

решив которую, найдем два противоположно направленных вектора $\vec{p}_1\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ и $\vec{p}_2\left(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$, удовлетворяющих условию задачи.

Задачи для самостоятельного решения

2.21. Построить радиус-вектор точки $M(4;-3;5)$ и определить его длину и направление.

2.22. Даны точки $A(1;2;3)$ и $B(3;-4;6)$. Построить вектор $\overrightarrow{AB}$, найти его проекции на оси координат и определить его направление.

2.23. Разложить вектор $\vec{a}$ по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, если он образует с осями координат Ox, Oy, Oz углы $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{2\pi}{3}, \gamma = \frac{\pi}{3}$ соответственно и $|\vec{a}| = 4\sqrt{2}$.

2.24. Вектор $\vec{a}$ образует углы $\alpha = 60^\circ$ и $\gamma = 45^\circ$ с осями Ox и Oz соответственно. Найти: а) угол β, который образует вектор $\vec{a}$ с осью Oy, если известно, что он тупой; б) координаты вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = 2$.

2.25. Найти координаты вектора $\vec{a}$, образующего равные острые углы с осями координат, если $\vec{a}^2 = 12$.

2.26. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

2.27. Известно, что $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\pi}{3}$. Найти:

а) $(\vec{a}, \vec{a} + 2\vec{b})$; б) $(\vec{a} - 2\vec{b}, 3\vec{a} + \vec{b})$; в) $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$.

2.28. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$ и $\vec{b} = 4\vec{p} + \vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – единичные ортогональные векторы.

2.29. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}$ и $\vec{b} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$, если $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, и $(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \frac{\pi}{3}$.

2.30. Найти длину вектора $\vec{a} = 4\vec{p} - \vec{q}$, если $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = \sqrt{3}$ и $(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \frac{\pi}{6}$.

2.31. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$, где $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1$, и $(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \frac{\pi}{3}$.

2.32. Найти угол между векторами $\vec{a}(-1;4;1)$ и $\vec{b}(1;2;2)$.

2.33. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(6;-1;1)$ и $\vec{b}(2;3;1)$.

2.34. Найти угол между векторами $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – единичные ортогональные векторы.

2.35. Найти угол между векторами $\vec{a} = \vec{p} - \vec{q}$ и $\vec{b} = 2\vec{p} + 4\vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – единичные векторы, и $(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \frac{2\pi}{3}$.

2.36. Найти угол между биссектрисами углов xOy и xOz.

2.37. Из вершины квадрата проведены две прямые, делящие противоположные стороны пополам. Найти угол между этими прямыми.

2.38. Найти угол между биссектрисами двух плоских углов треугольной пирамиды, имеющих общую вершину, если все ребра пирамиды равны.

2.39. Даны точки $A(2;-3;4)$, $B(5;-5;-2)$, $C(1;2;3)$, $D(7;4;6)$. Найти $\text{Пр}_{\overline{CD}}\,\overrightarrow{AB}$.

2.40. Даны векторы $\vec{a}(1;-1;4)$ и $\vec{b}(1;1;2)$. Вычислить $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}$ и $\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b}$.

2.41. Найти проекцию вектора $\vec{a}(2;-3;4)$ на ось, образующую равные углы с осями координат.

2.42. При каком значении λ векторы $\vec{p}(-\lambda;3;2)$ и $\vec{q}(1;2;-\lambda)$ ортогональны?

2.43. Найти векторы единичной длины, перпендикулярные оси Ox и вектору $\vec{a}(5;-3;4)$.

2.44. Найти вектор единичной длины, перпендикулярный оси Oz и вектору $\vec{a}(12;5;-13)$ и образующий острый угол с осью Ox.

2.45. Найти вектор единичной длины, ортогональный векторам $\vec{a}(1;-3;0)$ и $\vec{b}(-3;3;4)$ и образующий тупой угол с осью Oy.

2.46. Найти все векторы, ортогональные векторам $\vec{a}(1;1;-1)$ и $\vec{b}(1;-5;1)$.

2.3. Векторное и смешанное произведение векторов

Упорядоченная тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется правой, если при совмещении их начал кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден из конца вектора $\vec{c}$ как поворот против часовой стрелки (рис.2.6).

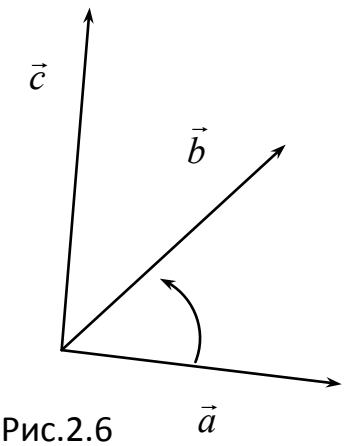

Рис.2.6

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, обозначаемый $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]$ и удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$;

2) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая.

Основные *свойства векторного произведения*:

1) $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}]$;

2) $[\lambda\vec{a},\vec{b}]=[\vec{a},\lambda\vec{b}]=\lambda[\vec{a},\vec{b}]$;

3) $[\vec{a},\vec{b}+\vec{c}]=[\vec{a},\vec{b}]+[\vec{a},\vec{c}]$;

4) $[\vec{a},\vec{b}]=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Если векторы $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$ заданы координатами в ортонормированном базисе, то

$$[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\vec{k}. \qquad (2.12)$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, может быть найдена по формуле

$$S=|[\vec{a},\vec{b}]|. \qquad (2.13)$$

Пример 2.8. Найти площадь треугольника с вершинами $A(2;-1;4)$, $B(3;1;6)$, $C(6;2;9)$.

Р е ш е н и е. Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}(1;2;2)$ и $\overrightarrow{AC}(4;3;5)$, поэтому согласно (2.13)

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]|.$$

По формуле (2.12)

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 2\\ 4 & 3 & 5\end{vmatrix}=4\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}.$$

Следовательно,

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+3^2+(-5)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Смешанным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, обозначаемое $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ и равное скалярному произведению вектора $[\vec{a},\vec{b}]$ на вектор $\vec{c}$, т.е. $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = ([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$.

Основные свойства смешанного произведения:

1) $([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}) = (\vec{a},[\vec{b},\vec{c}])$;

2) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = -(\vec{c},\vec{b},\vec{a}) = -(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$;

3) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны;

4) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) > 0 \Leftrightarrow$ тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая.

Если векторы $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$, $\vec{c}(x_3;y_3;z_3)$ заданы координатами в ортонормированном базисе, то

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.14)$$

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, может быть найден по формуле

$$V = |(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|. \qquad (2.15)$$

Пример 2.9. Доказать, что точки $A(1;2;3)$, $B(2;4;1)$, $C(1;-3;6)$ и $D(4;-2;3)$ лежат в одной плоскости.

Р е ш е н и е. Точки A, B, C, D лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AB}(1;2;-2)$, $\overrightarrow{AC}(0;-5;3)$ и $\overrightarrow{AD}(3;-4;0)$ компланарны, а значит по свойству 3) смешанного произведения $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}) = 0$. По формуле (2.14) находим

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 3 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Пример 2.10. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(3;-1;5)$, $B(5;2;6)$, $C(-1;3;4)$ и $D(7;3;-1)$.

Р е ш е н и е. Объем пирамиды $ABCD$ равен одной шестой объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}(2;3;1)$, $\overrightarrow{AC}(-4;4;-1)$, $\overrightarrow{AD}(4;4;-6)$, поэтому согласно (2.15)

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|.$$

Находим смешанное произведение:

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ -4 & 4 & -1\\ 4 & 4 & -6\end{vmatrix}=-156,$$

следовательно, $V_{ABCD}=\dfrac{156}{6}=26$.

Задачи для самостоятельного решения

2.47. Найти $|[\vec{a},\vec{b}]|$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=8$, $(\vec{a}\hat{,}\vec{b})=\dfrac{\pi}{6}$.

2.48. Найти $|[\vec{a},\vec{b}]|$, если $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=10$, $(\vec{a},\vec{b})=8$.

2.49. Найти и построить вектор $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]$, если:

а) $\vec{a}=2\vec{i}$, $\vec{b}=3\vec{k}$; б) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$; в) $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}$, $\vec{b}=2\vec{j}+3\vec{k}$.

2.50. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{j}+2\vec{k}$.

2.51. Доказать равенство $[2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}]=3[\vec{a},\vec{b}]$.

2.52. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{p}+\vec{q}$ и $\vec{b}=\vec{p}+3\vec{q}$, где $|\vec{p}|=|\vec{q}|=1$, $(\vec{p}\hat{,}\vec{q})=\dfrac{\pi}{6}$.

2.53. Известно, что $|\vec{p}|=|\vec{q}|=5$, и $(\vec{p}\hat{,}\vec{q})=\dfrac{\pi}{4}$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{p}-2\vec{q}$ и $\vec{b}=3\vec{p}+2\vec{q}$.

2.54. Дан параллелограмм $ABCD$. Известно, что $\overrightarrow{AC} = 2\vec{p} - \vec{q}$, $\overrightarrow{BD} = 5\vec{p} - 4\vec{q}$, где $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1$, и $(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \frac{\pi}{4}$. Найти площадь параллелограмма.

2.55. Даны вершины $A(3;-1;4)$, $B(2;4;5)$, $C(4;4;5)$ треугольника. Найти его площадь.

2.56. Даны вершины $A(1;-2;8)$, $B(0;0;4)$, $C(6;2;0)$ треугольника. Найти длину высоты треугольника, проведенной из вершины B.

2.57. Вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\vec{c} = 6\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}$.

2.58. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$. В случае некомпланарности определить, является тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правой или левой:

а) $\vec{a}(1;-1;3)$, $\vec{b}(2;3;-1)$, $\vec{c}(1;9;-11)$;

б) $\vec{a}(3;-1;2)$, $\vec{b}(2;1;-1)$, $\vec{c}(3;-2;1)$;

в) $\vec{a}(4;1;1)$, $\vec{b}(-6;2;-4)$, $\vec{c}(2;0;3)$.

2.59. При каком значении α векторы $\vec{a}(7;\alpha;-13)$, $\vec{b}(1;-2;1)$ и $\vec{c}(3;1;-2)$ компланарны?

2.60. Определить, лежат ли следующие точки в одной плоскости:

а) $A(1;2;-1)$, $B(4;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$;

б) $K(4;2;3)$, $M(-2;3;1)$, $N(0;1;-4)$, $P(5;-2;2)$.

2.61. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}(1;5;-1)$, $\vec{b}(3;1;-2)$, $\vec{c}(-4;0;3)$.

2.62. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $S(3;2;4)$, $A(1;-2;1)$, $B(7;9;4)$, $C(5;4;3)$.

2.63. Даны вершины пирамиды: $S(0;3;7)$, $A(2;0;4)$, $B(0;0;6)$, $C(4;3;5)$. Найти длину ее высоты, проведенной из вершины S.