1.5. Ранг матрицы. Теорема о совместности системы линейных уравнений

Пусть дана матрица $A_{m\times n}$. Выберем в матрице A любые k строк и k столбцов, где $k \le \min(m,n)$. Определитель, составленный из элементов матрицы A, стоящих на пересечении выбранных строк и столбцов, называется минором k-го порядка матрицы A.

Рангом матрицы A называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы. Ранг матрицы A обозначается $\operatorname{rang} A$.

Отметим, что:

1) ранг матрицы не может превосходить количество строк или столбцов данной матрицы;

2) $\operatorname{rang} A = 0$ тогда и только тогда, когда матрица A нулевая.

Пример 1.16. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Так как матрица A содержит 3 строки, то $\operatorname{rang} A \le 3$. Вычислим все миноры третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Все миноры третьего порядка равны 0, поэтому $\operatorname{rang} A \le 2$. Минор второго порядка $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -7 \ne 0$, следовательно, $\operatorname{rang} A = 2$.

В общем случае определение ранга матрицы путем перебора всех миноров достаточно трудоемко. Для упрощения данной задачи матрицу A с помощью элементарных преобразований, не изменяющих ранг матрицы, приводят к ступенчатому виду

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{21} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{bmatrix}, \qquad (1.15)$$

где $a_{ii} \ne 0,\ i = 1,\dots,r$.

Минор

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{rr} \neq 0$$

полученной ступенчатой матрицы (1.15) называется базисным. Его порядок равен r, следовательно, ранг матрицы (1.15), как и ранг матрицы A, равен r.

К элементарным преобразованиям матрицы относятся:

1) отбрасывание нулевой строки (столбца);

2) умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на отличное от нуля число;

3) перестановка местами любых двух строк (столбцов) матрицы;

4) прибавление к каждому элементу строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на некоторое число;

5) транспонирование матрицы.

Пример 1.17. Найти ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Р е ш е н и е. Отнимем от третьей строки матрицы A первую, а от второй – удвоенную первую строку:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

затем прибавим к третьей строке вторую и отбросим полученную нулевую строку:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Базисный минор полученной матрицы $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ имеет второй порядок, следовательно, ранг матрицы A равен 2.

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1.16)$$

Обозначим через A матрицу, а через $[A|B]$ – расширенную матрицу системы (1.16):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}; \quad [A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Теорема (Кронекера – Капелли). *Для того чтобы система* (1.16) *была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы* A *равнялся рангу ее расширенной матрицы* $[A|B]$, *т.е.* $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}[A|B] = r$. *Если при этом* $r = n$, *то система* (1.16) *имеет единственное решение, если же* $r < n$, *то система* (1.16) *имеет бесконечно много решений.*

Пример 1.18. Исследовать на совместность систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 3, \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду (не переставляя последний столбец):

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & -5 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -9 & 6 & -7 & -5 \\ 0 & -9 & 6 & -7 & -8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -9 & 6 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right].$$

Базисный минор матрицы A системы $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -9 \end{vmatrix}$, а расширенной матрицы

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$, следовательно, $\operatorname{rang} A = 2 \neq \operatorname{rang} B = 3$ и система несовместна.

Пример 1.19. Исследовать на совместность систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Имеем

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -14 & 1 \\ 0 & -1 & -14 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -14 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Система совместна, так как $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = 2$. Базисный минор $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ содержит элементы первого и второго столбцов, следовательно, так как в ходе приведения к ступенчатому виду порядок столбцов не изменялся, базисными переменными являются x_1 и x_2. Решение системы имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = 3 + 9x_3, \\ x_2 = -1 - 14x_3, \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

1.22. Найти ранг матриц:

а) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

г) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 5 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 2 & -5 & 7 & 1 \\ -3 & 8 & -9 & -6 \end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & -9 \\ 3 & 7 & -16 \end{bmatrix}$;

ж) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & -7 \\ 2 & 2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$; з) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 7 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 11 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

1.23. Исследовать на совместность систему уравнений. В случае совместности, определить количество решений системы:

а) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = -2, \\ x_1 - 7x_2 - 3x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 1, \\ 4x_1 - 5x_2 + 9x_3 - x_4 = 7, \\ 2x_1 - 13x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 11; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 5, \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 + 2x_4 = 9, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 8x_1 + x_2 + 13x_3 - 11x_4 = 7, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 11; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 6, \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ 4x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 2x_1 - 6x_2 - 3x_3 - x_4 = 1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 - 8x_3 - x_4 = 11, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 9, \\ 7x_1 - 4x_2 - 10x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 4x_4 = 11. \end{cases}$

Глава 2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

2.1. Векторы на плоскости и в пространстве

Вектором (геометрическим вектором) называется направленный отрезок, т.е. отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой концом. При этом любые два направленных отрезка считаются равными, если они имеют одинаковые длину и направление. Таким образом, начало вектора можно помещать в любую точку пространства.

Если начало вектора находится в точке A, а конец – в точке B, то вектор обозначают $\overrightarrow{AB}$. Векторы также принято обозначать строчными буквами латинского алфавита со стрелкой над ними: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\ldots$.

Длиной вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB, обозначается $|\overrightarrow{AB}|$. Вектор, длина которого равна 0, называется нулевым и обозначается $\vec{0}$. Нулевой вектор направления не имеет.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными*, если они параллельны одной и той же прямой. Если при этом векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют одинаковое направление, то они называются *сонаправленными*.

Три вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ называются *компланарными*, если они параллельны одной и той же плоскости.

Углом между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется наименьший из двух углов, образуемых этими векторами при совмещении их начал (рис.2.1), обозначается $\alpha = (\hat{\vec{a}, \vec{b}})$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *ортогональными* (перпендикулярными), если $(\hat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90^\circ$.

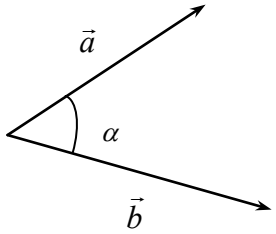

Рис.2.1

Произведением вектора $\vec{a}$ *на число* λ называется вектор, обозначаемый $\lambda\vec{a}$, длина которого равна $|\lambda||\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно ему, если $\lambda < 0$. Таким образом, векторы $\vec{a}$ и $\lambda\vec{a}$ коллинеарны. Справедливо и обратное утверждение: если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то они связаны равенством $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, где λ – некоторое число.

Суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ называется вектор $\overrightarrow{AC}$ (рис.2.2). Это определение называют *правилом треугольника* сложения векторов.

Сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a}+\vec{b}$.

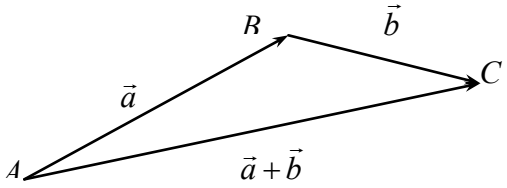

Рис.2.2

Сложение нескольких векторов выполняется по *правилу многоугольника*:

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}.$$

Для сложения двух неколлинеарных векторов применяют также правило параллелограмма: суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ является вектор $\overrightarrow{AC}$, где точка C – вершина параллелограмма $ABCD$ (рис.2.3).

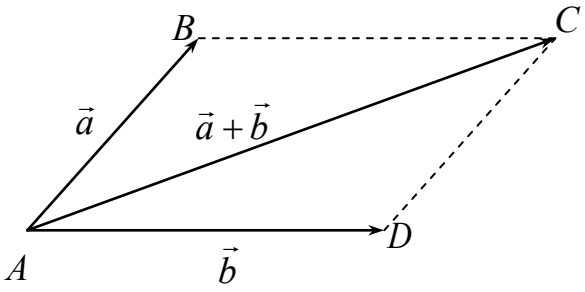

Рис.2.3

Пример 2.1. В треугольнике ABC даны стороны $AB=2$, $AC=3$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены с векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ соответственно и $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$. Точка E – середина стороны BC. Выразить векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AE}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Р е ш е н и е. По правилу треугольника имеем

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=-3\vec{b}+2\vec{a}.$$

Для того чтобы выразить вектор $\overrightarrow{AE}$, построим параллелограмм $ABDC$ (рис.2.4). По правилу параллелограмма $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\vec{a}+3\vec{b}$. Так как диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам, имеем $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)=\vec{a}+1{,}5\vec{b}$.

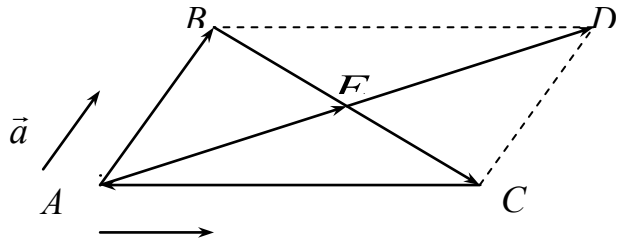

Рис.2.4

Если вектор $\vec{a}$ может быть представлен в виде *линейной комбинации векторов* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$, т.е.

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + ... + \lambda_n \vec{a}_n,$$

где λ_i, $i = 1, ..., n$, – некоторые числа, то говорят, что вектор $\vec{a}$ линейно выражается через векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$.

Базисом на плоскости называются любые два неколлинеарных вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, взятые в определенном порядке. Любой компланарный с базисными векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ вектор $\vec{a}$ можно представить, и притом единственным образом, в виде их линейной комбинации:

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2. \qquad (2.1)$$

Числа x и y в правой части равенства (2.1) называются *координатами* вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

Базисом в пространстве называются любые три некомпланарных вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, взятые в определенном порядке. Любой вектор $\vec{a}$ можно представить, и притом единственным образом, в виде их линейной комбинации:

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3, \qquad (2.2)$$

где x, y, z – координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Равенство (2.1) называется *разложением вектора* $\vec{a}$ *по базису* на плоскости, а равенство (2.2) – *разложением вектора* $\vec{a}$ *по базису* в пространстве.

Координаты вектора обычно записывают в круглых скобках после буквенного обозначения вектора. Например, запись $\vec{a}(2;-1;3)$ означает, что вектор $\vec{a}$ имеет координаты $2, -1$ и 3 в выбранном базисе.

Два вектора, заданные координатами в фиксированном базисе, равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты.

При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число. При сложении двух векторов складываются их соответствующие координаты.

Пример 2.2. При каком значении y векторы $\vec{a}(3;-2;5)$ и $\vec{b}(-6;y;-10)$ коллинеарны?

Р е ш е н и е. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если существует такое число λ, что выполняется равенство $\vec{a}=\lambda\vec{b}$. Приравнивая соответствующие координаты векторов $\vec{a}$ и $\lambda\vec{b}(-6\lambda;\lambda y;-10\lambda)$, получим:

$$\begin{cases} 3=-6\lambda, \\ -2=\lambda y, \\ 5=-10\lambda, \end{cases}$$

отсюда находим, что $\lambda=-\frac{1}{2}$ и $y=4$.

Базис называется *ортонормированным*, если базисные векторы попарно ортогональны и имеют длину, равную единице. Векторы ортонормированного базиса на плоскости обозначают $\vec{i},\vec{j}$, а в пространстве – $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. Если при указании координат вектора не дается ссылка на конкретный базис, то по умолчанию считают базис ортонормированным.

Декартовой системой координат называется совокупность фиксированной точки O, называемой началом координат, и базиса $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$. Декартова система координат с ортонормированным базисом называется *прямоугольной* (рис.2.5).

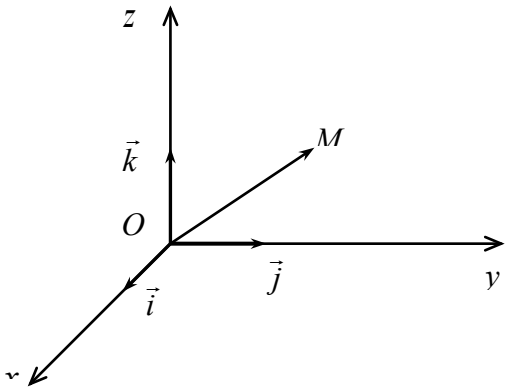

Рис.2.5

Прямые, походящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются *координатными осями*. Прямая Ox называется *осью абсцисс*, прямая Oy – *осью ординат*, прямая Oz – *осью аппликат*.

Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M. *Координатами точки* M в рассматриваемой системе координат называются координаты ее радиус-вектора. Первая координата называется *абсциссой*, вторая – *ординатой*, третья – *аппликатой*.

Длина вектора $\vec{a}(x;y;z)$, заданного своими координатами в ортонормированном базисе, определяется равенством

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ .$$

Если в декартовой системе координат даны две точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$, то вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ в соответствующем базисе имеет координаты $x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1$, а расстояние между точками M_1 и M_2 (длина вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$) находится по формуле

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ . \qquad (2.3)$$

Разделить отрезок M_1M_2 *в отношении* λ означает найти точку $M(x;y;z)$, принадлежащую данному отрезку, удовлетворяющую условию $\left|\overrightarrow{M_1M}\right| = \lambda\left|\overrightarrow{MM_2}\right|$. Координаты такой точки вычисляются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda};\quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda};\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}\ . \qquad (2.4)$$

При $\lambda = 1$ точка M делит отрезок M_1M_2 пополам и формулы (2.4) определяют координаты середины отрезка:

$$x_{cp} = \frac{x_1 + x_2}{2};\quad y_{cp} = \frac{y_1 + y_2}{2};\ z_{cp} = \frac{z_1 + z_2}{2}\ .$$

Пример 2.3. Даны вершины $A(1;-2),\ B(-2;4),\ C(5;-6)$ треугольника ABC. Точка K делит сторону AB в отношении $2:1$, считая от вершины A. Найти длину отрезка KC.

Р е ш е н и е. Так как $AK : KB = 2:1$, то координаты точки K найдем по формулам (2.4) при $\lambda = 2$:

$$x_K = \frac{1+2\cdot(-2)}{1+2} = -1, \quad y_K = \frac{-2+2\cdot 4}{1+2} = 2,$$

т.е. $K(-1;2)$. Длину отрезка KC найдем по формуле (2.3)

$$\left|\overrightarrow{KC}\right| = \sqrt{\left(5-(-1)\right)^2 + (-6-2)^2} = 10.$$