Задачи Эллипс

3.106. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что:

1) его полуоси равны 5 и 2;

2) его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами $2c=8$;

3) его малая ось равна 24, а расстояние между фокусами $2c=10$;

4) расстояние между его фокусами $2c=6$ и эксцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{5}$;

5) его большая ось равна 20, а эксцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{5}$;

6) его малая ось равна 10, а эксцентриситет $\varepsilon=\frac{12}{13}$;

7) расстояние между его директрисами равно 5 и расстояние между фокусами $2c=4$;

8) его большая ось равна 8, а расстояние между директрисами равно 16;

9) его малая ось равна 6, а расстояние между директрисами равно 13;

10) расстояние между его директрисами равно 32 и эксцентриситет $\varepsilon=\frac{1}{2}$.

3.107. Определить полуоси каждого из следующих эллипсов:

1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$; 3) $x^2+25y^2=25$;

4) $x^2+5y^2=15$; 5) $4x^2+9y^2=25$; 6) $9x^2+25y^2=1$.

3.108. Дан эллипс $9x^2+25y^2=225$. Найти:

1) его полуоси; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения директрис.

3.109. Вычислить площадь четырехугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $x^2+5y^2=20$, а две другие совпадают с концами малой оси эллипса.

3.110. На эллипсе $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ найти точки, абсцисса которых равна –3.

3.111. Определить, какие из точек $A_1(-2; 3)$, $A_2(2; -2)$, $A_3(2; -4)$, $A_4(-1; 3)$, $A_5(-4; -3)$, $A_6(3; -1)$, $A_7(3; -2)$, $A_8(2; 1)$, $A_9(0; 15)$ и $A_{10}(0; -16)$ лежат на эллипсе $8x^2+5y^2=77$, какие внутри эллипса и какие вне эллипса.

3.112. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

1) $y=\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$; 2) $y=-\frac{5}{3}\sqrt{9-x^2}$;

3) $y=-\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}$; 4) $y=\frac{1}{7}\sqrt{49-y^2}$.

Изобразить эти линии на чертеже.

3.113. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \frac{1}{3}$, центр его совпадает с началом координат, один из фокусов $F(-2;\ 0)$. Вычислить расстояние от точки M_1 эллипса с абсциссой, равной 2, до директрисы, односторонней с данным фокусом.

3.114. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \frac{1}{2}$, его центр совпадает с началом координат, одна из директрис задана уравнением $x=16$. Вычислить расстояние от точки M_1 эллипса с абсциссой, равной –4, до фокуса, одностороннего с данной директрисой.

3.115. Определить точки эллипса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$, расстояние которых до правого фокуса равно 14.

3.116. Составить уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, если даны:

1) точка $M_1(-2\sqrt{5};\ 2)$ эллипса и его малая полуось $b=3$;

2) точка $M_2\ (2;\ -2)$ эллипса и его большая полуось $a=4$;

3) точки $M_1(4;-\sqrt{3})$ и $M_2(2\sqrt{2};\ 3)$ эллипса;

4) точка $M_1(\sqrt{15};\ -1)$ эллипса и расстояние между его фокусами $2c=8$;

5) точка $M_1(2;\ -\frac{5}{3})$ эллипса и его эксцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$;

6) точка $M_1(8;\ 12)$ эллипса и расстояние $r_1=20$ от нее до левого фокуса;

7) точка $M_1(-\sqrt{5};\ 2)$ эллипса и расстояние между его директрисами равно 10.

3.117. Эллипс касается оси абсцисс в точке $A(3;\ 0)$ и оси ординат в точке $B(0;\ -4)$. Составить уравнение этого эллипса, зная, что его оси симметрии параллельны координатным осям.

3.118. Точка $C(-3;\ 2)$ является центром эллипса, касающегося обеих координатных осей. Составить уравнение этого эллипса, зная, что его оси симметрии параллельны координатным осям.

3.119. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет эллипс, и найти координаты его центра C, полуоси, эксцентриситет и уравнения директрис:

1) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$; 2) $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$;
3) $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$.

3.120. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

1) $y=-7+\frac{2}{5}\sqrt{16+6x-x^2}$; 2) $y=1-\frac{4}{3}\sqrt{-6x-x^2}$;

3) $x=-2\sqrt{-5-yx-y^2}$; 4) $y=-5+\frac{2}{3}\sqrt{8+2y-y^2}$.

Изобразить эти линии на чертеже.

3.121. Составить уравнение эллипса, зная, что:

1) его большая ось равна 26 и фокусы $F_1(-10; 0)$, $F_2(14; 0)$;

2) его малая ось равна 2 и фокусы $F_1(-1; -1)$, $F_2(1; 1)$;

3) его фокусы $F_1(-2; \frac{3}{2})$, $F_2(2; -\frac{3}{2})$ и эксцентриситет $\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) его фокусы $F_1(1; 3)$, $F_2(3; 1)$ и расстояние между директрисами равно $12\sqrt{2}$.

3.122. Составить уравнение эллипса, если известны его эксцентриситет $\varepsilon=\frac{2}{3}$, фокус $F(-4; 1)$ и уравнение соответствующей директрисы $x-5=0$.

3.123. Точка $A(-3; -5)$ лежит на эллипсе, фокус которого $F(-1; -4)$, а соответствующая директриса задана уравнением $x-2=0$. Составить уравнение этого эллипса.

3.124. Найти точки пересечения прямой $x+2y-7=0$ и эллипса $x^2+4y^2=25$.

3.125. Определить, как расположена прямая относительно эллипса: пересекает ли, касается или проходит вне его, если прямая и эллипс заданы следующими уравнениями:

1) $2x-y-3=0$, 2) $2x+y-10=0$, 3) $3x+2y-20=0$,

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{10}=1$.

3.126. Определить, при каких значениях m прямая $y=-x+m$:

1) пересекает эллипс $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$;

2) касается его; 3) проходит вне этого эллипса.

3.127. Составить уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$, параллельных прямой $3x+2y+7=0$.

3.128. Составить уравнения касательных к эллипсу $x^2+4y^2=20$, перпендикулярных к прямой $2x-2y-13=0$.

3.129. На эллипсе $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$ найти точку M_1, ближайшую к прямой $2x-3y+25=0$, и вычислить расстояние d от точки M_1 до этой прямой.

3.130. Из точки $A\left(\frac{10}{3};\ \frac{5}{3}\right)$ проведены касательные к эллипсу $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$. Составить их уравнения.

3.131. Из точки $C(10;\ -8)$ проведены касательные к эллипсу $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Составить уравнение хорды, соединяющей точки касания.

3.132. Эллипс проходит через точку $A(4;\ -1)$ и касается прямой $x+4y-10=0$. Составить уравнение этого эллипса при условии, что его оси совпадают с осями координат.

3.133. Составить уравнение эллипса, касающегося двух прямых $3x-2y-20=0$, $x+6y-20=0$, при условии, что его оси совпадают с осями координат.

3.134. Прямая $x-y-5=0$ касается эллипса, фокусы которого находятся в точках $F_1(-3;\ 0)$ и $F_2(3;\ 0)$. Составить уравнение этого эллипса.

3.135. Составить уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если известны уравнение касательной к эллипсу $3x+10y-25=0$ и его малая полуось $b=2$.

3.136. Определить точки пересечения эллипсов $x^2+9y^2-45=0$ и $x^2+9y^2-6x-27=0$.

3.137. Составить уравнение окружности в каждом из следующих случаев:

1) центр окружности совпадает с началом координат и ее радиус $R=3$;

2) центр окружности совпадает с точкой $C(2;\ -3)$ и ее радиус $R=7$;

3) окружность проходит через начало координат и ее центр совпадает с точкой $C(6;\ -8)$;

4) окружность проходит через точку $A(2;\ 6)$ и ее центр совпадает с точкой $C(-1;\ 2)$;

5) точки $A(3;\ 2)$ и $B(-1;\ 6)$ являются концами одного из диаметров окружности;

6) центр окружности совпадает с началом координат и прямая $3x-4y+20=0$ является касательной к окружности;

7) центр окружности совпадает с точкой $C(1;\ -1)$ и прямая $5x-12y+9=0$ является касательной к окружности;

8) окружность проходит через точки $A(3;\ 1)$ и $B(-1;\ 3)$, а ее центр лежит на прямой $3x-y-2=0$;

9) окружность проходит через три точки: $A(1;\ 1)$, $B(1;\ -1)$ и $C(2;\ 0)$;

10) окружность проходит через три точки: $M_1(-1;\ 5)$, $M_2(-2;\ -2)$ и $M_3(5;\ 5)$.

3.138. Через точку $A(4;\ 2)$ проведена окружность, касающаяся обеих координатных осей. Определить ее центр C и радиус R.

3.139. Через точку $M_1(1;\ -2)$ проведена окружность радиуса 5, касающаяся оси Ox. Определить центр C окружности.

3.140. Написать уравнения окружностей радиуса $R=\sqrt{5}$, касающихся прямой $x-2y-1=0$ в точке $M_1(3;\ 1)$.

3.141. Составить уравнение окружности, касающейся двух параллельных прямых: $2x+y-5=0$ и $2x+y+15=0$, причем одной из них — в точке $A(2;\ 1)$.

3.142. Составить уравнения окружностей, которые проходят через точку $A(1;\ 0)$ и касаются двух параллельных прямых: $2x+y+2=0$ и $2x+y-18=0$.

3.143. Составить уравнение окружности, которая, имея центр на прямой $2x+y=0$, касается прямых $4x-3y+10=0$, $4x-3y-30=0$.

3.144. Составить уравнения окружностей, проходящих через начало координат и касающихся двух пересекающихся прямых: $x+2y-9=0$, $2x-y+2=0$.

3.145. Какие из нижеприводимых уравнений определяют окружности? Найти центр C и радиус R каждой из них:

1) $(x-5)^2+(y+2)^2=25$;
2) $(x+2)^2+y^2=64$;
3) $(x-5)^2+(y+2)^2=0$;
4) $x^2+(y-5)^2=5$;
5) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$;
6) $x^2+y^2-2x+4y+14=0$;
7) $x^2+y^2+4x-2y+5=0$;
8) $x^2+y^2+x=0$,
9) $x^2+y^2+6x-4y+14=0$;
10) $x^2+y^2+y=0$

3.146. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

1) $y=+\sqrt{9-x^2}$;

2) $y=-\sqrt{25-x^2}$;

3) $x=-\sqrt{4-y^2}$;

4) $x=+\sqrt{16-y^2}$;

5) $y=15+\sqrt{64-x^2}$;

6) $y=15-\sqrt{64-x^2}$;

7) $x=-2-\sqrt{9-y^2}$;

8) $x=-2+\sqrt{9-y^2}$;

9) $y=-3-\sqrt{21-4x-x^2}$;

10) $x=-5+\sqrt{40-6y-y^2}$.

Изобразить эти линии на чертеже.

3.147. Установить, как расположена точка $A(1;\ -2)$ относительно каждой из следующих окружностей – внутри, вне или на контуре окружности:

1) $x^2+y^2=1$

2) $x^2+y^2=5$;

3) $x^2+y^2=9$;

4) $x^2+y^2-8x-4y-5=0$.

3.148. Составить уравнение диаметра окружности $x^2+y^2+4x-6y-17=0$, перпендикулярного к прямой $5x+2y-13=0$.

3.149. Определить координаты точек пересечения прямой $7x-y+12=0$ и окружности $(x-2)^2+(y-1)^2=25$.

3.150. Определить, как расположена прямая относительно окружности (пересекает ли, касается или проходит вне ее), если прямая и окружность заданы следующими уравнениями:

1) $y=2x-3$ и $x^2+y^2-3x+2y-3=0$;

2) $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ и $x^2+y^2-8x+2y+12=0$;

3) $y=x+10$ и $x^2+y^2-1=0$.

3.151. Определить, при каких значениях углового коэффициента k прямая $y=kx$:

1) пересекает окружность $x^2+y^2-10x+16=0$;

2) касается этой окружности;

3) проходит вне этой окружности.

3.152. Вывести условие, при котором прямая $y=kx+b$ касается окружности $x^2+y^2=R^2$.

3.153. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $A(1;\ -1)$ и точки пересечения двух окружностей:

$x^2+y^2+2x-2y-23=0,\qquad x^2+y^2-6x+12y-35=0.$

3.154. Составить уравнение прямой, проходящей через точки пересечения двух окружностей: $x^2+y^2+3x-y=0$, $3x^2+3y^2+2x+y=0$.

3.155. Составить уравнение касательной к окружности $x^2+y^2=5$ в точке $A(-1;\ 2)$.

3.156. Точка $M_1(x_1,\ y_1)$ лежит на окружности $x^2+y^2=R^2$. Составить уравнение касательной к этой окружности в точке M_1.

3.157. Определить острый угол, образованный при пересечении прямой $3x-y-1=0$ и окружности $(x-2)^2+y^2=5$ (углом между прямой и окружностью называется угол между прямой и касательной к окружности, проведенной в точке их пересечения).

3.158. Определить, под каким углом пересекаются две окружности: $(x-3)^2+(y-1)^2=8$ и $(x-2)^2+(y+2)^2=2$ (углом между двумя окружностями называется угол между их касательными в точке пересечения).

3.159. Из точки $A(4;\ 2)$ проведены касательные к окружности $x^2+y^2=10$. Определить угол, образованный этими касательными.

3.160. Из точки $P(2;\ -3)$ проведены касательные к окружности $(x-1)^2+(y+5)^2=4$. Составить уравнение хорды, соединяющей точки касания.

3.161. Из точки $C(6;\ -8)$ проведены касательные к окружности $x^2+y^2=25$. Вычислить расстояние d от точки C до хорды, соединяющей точки касания.

3.162. Вычислить длину касательной, проведенной из точки $A(1;\ -2)$ к окружности $x^2+y^2+6x+2y+5=0$.

3.163. Составить уравнения касательных к окружности $x^2+y^2+10x+2y+6=0$, параллельных прямой $2x+y-7=0$.