Задачи для самостоятельного решения

4.1. Вычислить интегралы по формуле Ньютона-Лейбница, применяя метод замены переменной интегрирования или метод интегрирования «по частям».

1) $\int\limits_{1+i}^{-1-i}(2z+1)dz$;

2) $\int\limits_{1}^{i}(3z^4-2z^3)dz$;

3) $\int\limits_{1}^{i} z\sin z dz$;

4) $\int\limits_{-i}^{i} ze^{z^2}dz$.

4.2. Вычислить интегралы от данной функции по указанной кривой L.

1) $\int\limits_L z^3 dz$, L – дуга параболы $x=y^2$ с концами в точках $A=0, B=1+i$;

2) $\int\limits_L \frac{\cos z}{z(z-2)^2}dz$, L – окружность $|z-2|=1$, ориентированная против часовой стрелки;

3) $\int\limits_L (z+5)\cos z dz$, L – произвольная линия, соединяющая точки 0 и $2i$;

4) $\int\limits_L (z+2\bar{z})dz$, L – дуга окружности $|z|=2$, $-\frac{\pi}{2}\le \arg z\le \frac{\pi}{2}$;

5) $\int\limits_L z\bar{z}dz$, L – отрезок AB, где $A=1+i, B=1-i$;

6) $\int\limits_L \bar{z}z^{-1}dz$, L – ориентированная по часовой стрелке дуга окружности $|z|=2$ от $z_1=2$ до $z_2=-1-i\sqrt{3}$;

7) $\int\limits_L z\,\mathrm{Im}\,z dz$, L – ориентированная против часовой стрелке дуга окружности $|z|=1$ от $z_1=i$ до $z_2=-1$.

4.3. С помощью интегральных формул Коши вычислить интегралы (все окружности обходятся против часовой стрелки).

1) $\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^z dz}{z^2+2z}$;

2) $\oint\limits_{|z-1|=6}\frac{zdz}{(z-2)^3(z+4)}$;

3) $\oint\limits_{|z|=2}\frac{\cos \pi z dz}{z^2-1}$;

7) $\oint\limits_{|z|=2}\frac{\sin iz dz}{z^2-4z+3}$;

8) $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z^3}\cos\frac{\pi}{z+1}dz$;

9) $\oint\limits_{|z-2|=2}\frac{ze^{iz}dz}{z^4+1}$;

4) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin^2 z dz}{z^3}$;

5) $\oint\limits_{|z+2i|=3} \frac{(z^2+1)dz}{z^3(z^2+4)}$;

6) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{(\sin \pi z + \cos \pi z)dz}{z^2(z+1)}$;

10) $\oint\limits_{|z+i|=2} \frac{ch\pi z dz}{(z^2+1)z}$;

11) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{(z^3+z+1)dz}{z^6+z^4}$;

12) $\oint\limits_{|z+2i|=3} \frac{ch\pi z dz}{z^4+4z^2}$.

4) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin^2 z dz}{z^3}$;

5) $\oint\limits_{|z+2i|=3} \frac{(z^2+1)dz}{z^3(z^2+4)}$;

6) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{(\sin \pi z + \cos \pi z)dz}{z^2(z+1)}$;

10) $\oint\limits_{|z+i|=2} \frac{ch\pi z dz}{(z^2+1)z}$;

11) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{(z^3+z+1)dz}{z^6+z^4}$;

12) $\oint\limits_{|z+2i|=3} \frac{ch\pi z dz}{z^4+4z^2}$.