Задачи для самостоятельного решения

3.1. Показать, что функция дифференцируема, и найти её производную.

1) $f(z)=z\sin z$;
2) $f(z)=e^{iz}$;
3) $f(z)=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$;
4) $f(z)=(e^{-y}\sin x+y+1)+i(-e^{-y}\cos x-x+1)$.

3.2. Доказать, что функция не является дифференцируемой.

1) $f(z)=\bar{z}$ $(z\neq 0)$;
2) $f(z)=\arg z$ $(z\neq 0)$;
3) $f(z)=\operatorname{Re} z$;
4) $f(z)=z\bar{z}$.

3.3. Определить область аналитичности функции.

1) $tg2z$;
2) $\dfrac{z^3+1}{z^2(z^2-3z+2)}$;
3) $ctg\dfrac{z}{2}$;
4) $\sin\dfrac{z+1}{z^2+1}$.

3.4. Найти множество точек, в которых функция $f(z)=\left|x^2-y^2\right|+2i\left|x\ y\right|$ является дифференцируемой.

3.5. Вычислить производную функции.

1) $w=e^{iz}$;
2) $w=\dfrac{\sin z\cdot e^z}{\cos z-z^2}$;
3) $w=z\sin z$;
4) $w=\dfrac{\sin z+1}{\cos z}$.

3.6. Найти аналитическую функцию $w(z)$, если известна её мнимая часть.

1) $v(x,y)=x+y$;
2) $v(x,y)=x+y-3$;
3) $v(x,y)=x-2y\left((x+1)^2+y^2\right)^{-1}$;
4) $v(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}, |z|>0$;
5) $v(x,y)=\sin x\cdot shy$;
6) $v(x,y)=2y-arctg(xy^{-1})+3$.

3.7. Найти аналитическую функцию $w(z)$, если известна её действительная часть.

1) $u(x,y)=3x^2y-y^3$;
2) $u(x,y)=x^3-3xy^2+1$;
3) $u(x,y)=3x+y\left(x^2+y^2\right)^{-1}$;
4) $u(x,y)=2^x\cos(y\ln 2)$;
5) $u(x,y)=e^{-y}\sin x+y$;
6) $u(x,y)=e^{-y}\cos x+2x+3$.

3.8. Определить действительные функции $\varphi(y)$ и $\psi(x)$ так, чтобы функция $f(z)=\varphi(y)+i\psi(x)$ была дифференцируемой.

3.9. При каком значении a функция $f(z)=a\bar{z}$ дифференцируема?

3.10. Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $w=f(z)$ в указанных точках.

1) $w=\dfrac{z+2}{z-i}$, $z_0=2i$;

2) $w=e^z$, $z_0=i$.

3) $w=z^2$, $z_1=i$, $z_2=1+i$, $z_3=2$;

4) $w=e^z$, $z_1=\ln 2+i\dfrac{\pi}{4}$, $z_2=-1-i\dfrac{\pi}{2}$.

3.11. Найти те точки, в которых угол поворота данных отображений равен указанному числу радиан.

1) $w=z^2+16i$, $0{,}5\pi$;

2) $w=z^3+i$, $0{,}5\pi$;

3) $w=z^2+6z-8$, $-0{,}5\pi$;

4) $w=iz^3$, $0{,}75\pi$.

3.12. Выяснить, в каких точках у функции существует производная. Найти производную в точках ее существования.

1) $w=z\cdot\operatorname{Im}z$;

2) $w=iz+z\bar{z}$;

3) $w=x^2+y^2+(2xy+y)i$;

4) $w=z^2+6z-8$;

5) $w=z\cdot\operatorname{Re}z$;

6) $w=2xy+y^2i$.

3.13. Существует ли аналитическая функция $w(z)$, у которой ее мнимая часть равна $v(x,y)=2xy-2arctg(yx^{-1})-4$?