3.5. Прямая и плоскость в пространстве

Уравнением данной поверхности (в выбранной системе координат) называется такое уравнение с тремя переменными $P(x, y, z)=0$, которому удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на этой поверхности, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на ней.

Линия в пространстве определяется как пересечение двух данных поверхностей. Точка $M(x; y; z)$, лежащая на линии, принадлежит как одной, так и другой поверхности, и следовательно, координаты этой точки удовлетворяют уравнениям обоих поверхностей. Поэтому *уравнение линии* в пространстве опиисывается совокупностью уравнений $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ \Phi(x,y,z)=0. \end{cases}$

Если $F(x, y, z)=0$, $\Phi(x, y, z)=0$, $\Psi(x, y, z)=0$ есть уравнения трех поверхностей, то для нахождения точек их пересечения нужно решить систему:

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ \Phi(x,y,z)=0, \\ \Psi(x,y,z)=0. \end{cases}$$

Каждое решение x, y, z этой системы представляет собой координаты одной из точек пересечения данных поверхностей.

3.5.1. Плоскость в пространстве

В декартовых координатах каждая плоскость определяется линейным уравнением первой степени и каждое линейное уравнение первой степени определяет плоскость.

Всякий ненулевой вектор, перпендикулярный к данной плоскости, называется ее *нормальным вектором*. Уравнение

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (3.43)$$

определяет плоскость, проходящую через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и имеющую нормальный вектор $\vec{n}=(A;\ B;\ C)$.

Раскрывая в уравнении (3.43) скобки и обозначая число $-Ax_0-By_0-Cz_0$ буквой D, получим

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (3.44)$$

Это уравнение называется общим уравнением плоскости.

Уравнением плоскости в векторной форме называется уравнение

$$\vec{n}\cdot\vec{r}+D=0, \qquad (3.45)$$

где $\vec{n}$ – нормальный вектор плоскости; $\vec{r}=(x;\ y;\ z)$ – радиус-вектор произвольной точки плоскости.

Если в уравнении (3.44) отсутствует свободный член ($D=0$), то плоскость проходит через начало координат. Если отсутствует член с одной из текущих координат (т.е. какой-либо из коэффициентов A, B, C равен нулю), то плоскость параллельна одной из координатных осей, именно той, которая одноименна с отсутствующей координатой; если, кроме того, отсутствует свободный член, то

плоскость проходит через эту ось. Если в уравнении отсутствуют два члена с текущими координатами (какие-либо два из коэффициентов *A*, *B*, *C* равны нулю), то плоскость параллельна одной из координатных плоскостей, именно той, которая проходит через оси, одноименные с отсутствующими координатами; если, кроме того, отсутствует свободный член, то плоскость совпадает с этой координатной плоскостью.

Если в уравнении плоскости (3.44) ни один из коэффициентов *A*, *B*, *C*, *D* не равен нулю, то это уравнение может быть преобразовано к виду

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \qquad (3.46)$$

где $a=-D/A$, $b=-D/B$, $c=-D/C$ есть величины отрезков, которые плоскость отсекает на координатных осях (считая каждый от начала координат). Уравнение (3.46) называется **уравнением плоскости в «отрезках»**.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$ может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_1-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.47)$$

Уголом φ между двумя плоскостями называется угол между нормалями к этим плоскостям. Такое определение позволяет в качестве угла между плоскостями рассматривать либо острый, либо тупой угол, дополняющие друг друга до π.

Если заданы плоскости $\overrightarrow{n_1}\cdot\vec{r}+D_1=0$ и $\overrightarrow{n_2}\cdot\vec{r}+D_2=0$, где $\overrightarrow{n_1}$ (A_1; B_1; C_1), $\overrightarrow{n_2}$ (A_2; B_2; C_2), то угол между векторами нормали найдем из их скалярного произведения, т.е. $\cos\varphi=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$.

Таким образом, угол между плоскостями находится по формуле

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (3.48)$$

Если две плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ параллельны, то их нормальные векторы $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$ и $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$ коллинеарны (рис. 3.17), т.е. из условия коллинеарности двух векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ вытекает условие параллельности двух плоскостей

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \qquad (3.49)$$

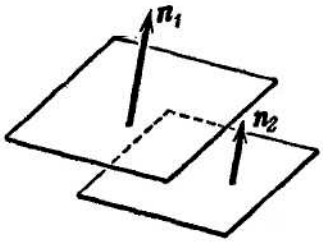

Рис. 3.17

Если две плоскости перпендикулярны, то их нормальные векторы также перпендикулярны (рис. 3.18), т.е. из условия ортогональности двух векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ вытекает условие перпендикулярности двух плоскостей

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \qquad (3.50)$$

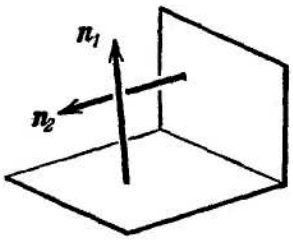

Рис. 3.18

Расстояние от точки $P(x_1;y_1;z_1)$ до плоскости (3.44) находится по формуле

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (3.51)$$

Пример 3.22. Найти уравнение плоскости, параллельной оси Oz и проходящей через точки $A(2;3;-1)$ и $B(-1;\,2;\,4)$.

Р е ш е н и е. Так как плоскость по условию задачи параллельна оси Oz, то в ее общем уравнении (3.44) отсутствует координата z, т.е. искомое уравнение имеет вид $Ax+By+D=0$.

Если плоскость проходит через точку, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению плоскости. Подставляя координаты точек A и B в уравнение $Ax+By+D=0$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2A+3B+D=0, \\ -A+2B+D=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3B+D=-2A, \\ 2B+D=A. \end{cases}.$$

Решая систему, находим $B=-3A$, $D=7A$. Таким образом, уравнение плоскости имеет вид $Ax-3Ay+7A=0$. После сокращения на A уравнение искомой плоскости примет вид $x-3y+7=0$.

Пример 3.23. Найти уравнение плоскости, перпендикулярной оси Ox и проходящей через точку $A(3;\,7;-1)$.

Решение. Так как плоскость перпендикулярна оси Ox, то она параллельна плоскости Oyz и потому ее уравнение имеет вид $Ax+D=0$. Подставляя в это уравнение координаты точки $A(3;7;-1)$, получаем, что $D=-3A$. Значение $D=-3A$ подставим в уравнение плоскости и, сокращая на A, получаем уравнение искомой плоскости в общем виде $x-3=0$.

Пример 3.24. Через точку $A(2;\,3;\,-1)$ провести плоскость, параллельную плоскости $2x-3y+5z-4=0$.

Решение. Используя уравнение (3.43), имеем $A(x-2)+B(y-3)+C(z+1)=0$. Из условия (3.49) параллельности двух плоскостей получаем $\frac{A}{2}=\frac{B}{-3}=\frac{C}{5}=k$. Таким образом, уравнение искомой плоскости примет вид $2k(x-2)-3k(y-3)+5k(z+1)=0$, или после сокращения на k, $2(x-2)-3(y-3)+5(z+1)=0$. Раскрывая скобки и приводя подобные, имеем общее уравнение искомой плоскости $2x-3y+5z+10=0$.

Пример 3.25. Через точки $A(1;\,2;\,3)$ и $B(-2;-1;\,3)$ провести плоскость, перпендикулярную плоскости $x+4y-2z+5=0$.

Решение. Нормальный вектор плоскости $x+4y-2z+5=0$ имеет координаты $\vec{n}=(1;\,4;-2)$. Пусть $M(x;y;z)$– произвольная точка искомой плоскости. Рассмотрим два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AM}$, принадлежащие искомой плоскости. Используя условие компланарности трех векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AM}$ и $\vec{n}$, запишем уравнение искомой плоскости $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2-1 & -1-2 & 3-3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}=0$.

Раскрывая определитель $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -3 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}=0$ по правилу «треугольника», имеем $6x-6-12z+36+3z-9-6y+12=0$ или $6x-6y-9z+33=0$ –общее уравнение искомой плоскости.

Пример 3.26. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;-2;6)$, $M_2(5;-4;-2)$ и отсекающей равные отрезки на осях Ox и Oy.

Решение. Уравнение плоскости ищем в виде (3.46). По условию $a=b$, поэтому искомое уравнение можно записать так: $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{c}=1$. Подставляя координаты точек $M_1(1;-2;6)$ и $M_2(5;-4;-2)$ в последнее уравнение, получим

$$\begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{-2}{a}+\frac{6}{c}=1, \\ \frac{5}{a}+\frac{-4}{a}+\frac{-2}{c}=1. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -\frac{1}{a}+\frac{6}{c}=1, \\ \frac{1}{a}-\frac{2}{c}=1. \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, находим $c=2,\ a=\frac{1}{2}$. Следовательно, искомое уравнение имеет вид $\frac{x}{\frac{1}{2}}+\frac{y}{\frac{1}{2}}+\frac{z}{2}=1$ или в общем виде $4x+4y+z-2=0$.

Пример 3.27. На оси Ox найти точку, равноудаленную от точки $A(9;-2;2)$ и от плоскости $3x-6y+2z-3=0$.

Решение. Поскольку искомая точка $M(x;y;z)$ лежит на оси Ox, то $y=0$ и $z=0$. Расстояние от данной точки $M(x;0;0)$ до плоскости $3x-6y+2z-3=0$ найдем по формуле (3.51):

$$d_1=\frac{|3x-6\cdot 0+2\cdot 0-3|}{\sqrt{3^2+(-6)^2+2^2}}=\frac{|3x-3|}{7}.$$

Найдем расстояние между двумя точками $M(x;0;0)$ и $A(9;-2;2)$

$$d_2=\sqrt{(x-9)^2+(0+2)^2+(0-2)^2}=\sqrt{(x-9)^2+8}.$$

Согласно условию $d_1 = d_2$, т.е. $\frac{|3x-3|}{7} = \sqrt{(x-9)^2+8}$. Возводя в квадрат обе части последнего уравнения и приводя подобные члены, получаем $5x^2 - 108x + 544 = 0$, откуда находим $x_1 = 8$, $x_2 = 13\frac{3}{5}$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют две точки: $M_1(8;0;0)$ и $M_1(13\frac{3}{5};0;0)$.

Задачи для самостоятельного решения

3.221. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2; 1; -1)$ и имеет нормальный вектор $\vec{n}=(1; -2; 3)$.

3.222. Точка $P(2; -1; -1)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

3.223. Даны две точки $M_1(3; -1; 2)$ и $M_2(4; -2; -1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно к вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

3.224. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3; 4; -5)$ параллельно двум векторам $\overrightarrow{a_1} = (3; 1; -1)$ и $\overrightarrow{a_2} = (1; -2; 1)$.

3.225. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2; -1; 3)$ и $M_2(3; 1; 2)$ параллельно вектору $\vec{a} = (3; -1; -4)$.

3.226. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1(3; -1; 2)$, $M_2(4; -1; -1)$ и $M_3(2; 0; 2)$.

3.227. Определить координаты какого-нибудь нормального вектора каждой из следующих плоскостей и записать выражение координат произвольного нормального вектора:

1) $2x-y-2z+5=0$; 2) $x+5y-z=0$; 3) $3x-2y-7=0$;

4) $5y-3z=0$; 5) $x+2=0$; 6) $y-3=0$.

3.228. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют параллельные плоскости:

1) $2x-3y+5z-7=0$, $2x-3y+5z+3=0$;

2) $4x+2y-4z+5=0$, $2x+y+2z-1=0$;

3) $x-3z+2=0$, $2x-6z-7=0$.

3.229. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют перпендикулярные плоскости:

1) $3x-y-2z-5=0$, $x+9y-3z+2=0$;

2) $2x+3y-z-3=0$, $x-y-z+5=0$;

3) $2x-5y+z=0$, $x+2z-3=0$.

3.230. Определить, при каких значениях l и m следующие пары уравнений будут определять параллельные плоскости:

1) $2x+ly+3z-5=0$, $mx-6y-6z+2=0$;

2) $3x-y+lz-9=0$, $2x+my+2z-3=0$;

3) $mx+3y-2z-1=0$, $2x-5y-lz=0$.

3.231. Определить, при каком значении l следующие пары уравнений будут определять перпендикулярные плоскости:

1) $3x-5y+lz-3=0$, $x+3y+2z+5=0$;

2) $5x+y-3z-3=0$, $2x+ly-3z+1=0$;

3) $7x-2y-z=0$, $lx+y-3z-1=0$.

3.232. Определить двугранные углы, образованные пересечением следующих пар плоскостей:

1) $x-y\sqrt{2}+z-1=0$, $x+y\sqrt{2}-z+3=0$;

2) $3y-z=0$, $2y+z=0$;

3) $6x+3y-2z=0$, $x+2y+6z-12=0$;

4) $x+2y+2z-3=0$, $16x+12y-15z-1=0$.

3.233. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат параллельно плоскости $5x-3y+2z-3=0$.

3.234. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям: $2x-y+3z-1=0$, $x+2y+z=0$.

3.235. Составить уравнение плоскости, которая проходит через две точки $M_1(1; -1; -2)$ и $M_2(3; 1; 1)$ перпендикулярно к плоскости $x-2y+3z-5=0$.

3.236. Установить, что три плоскости $x-2y+z-7=0$, $2x+y-z+2=0$, $x-3y+2z-11=0$ имеют одну общую точку, и вычислить ее координаты.

3.237. Доказать, что три плоскости $7x+4y+7z+1=0$, $2x-y-z+2=0$, $x+2y+3z-1=0$ проходят через одну прямую.

3.238. Доказать, что три плоскости $2x-y+3z-5=0$, $3x+y+2z-1=0$, $4x+3y+z+2=0$ пересекаются по трем различным параллельным прямым.

3.239. Определить, при каких значениях a и b плоскости $2x-y+3z-1=0$, $x+2y-z+b=0$, $x+ay-6z+10=0$:

1) имеют одну общую точку;
2) проходят через одну прямую;
3) пересекаются по трем различным параллельным прямым.

3.240. Составить уравнение плоскости, которая проходит:

1) через точку $M_1(2; -3; 3)$ параллельно плоскости Oxy;
2) через точку M_2(l; –2; 4) параллельно плоскости Oxz;
3) через точку $M_3(-5; 2; -1)$ параллельно плоскости Oyz.

3.241. Составить уравнение плоскости, которая проходит:

1) через ось Ox и точку $M_1(4; -1; 2)$;
2) через ось Oy и точку $M_2(1; 4; -3)$;
3) через ось Oz и точку $M_3(3; -4; 7)$.

3.242. Составить уравнение плоскости, которая проходит:

1) через точки $M_1(7; 2; -3)$ и $M_2(5; 6; -4)$ параллельно оси Ox;
2) через точки $P_1(2; -1; 1)$ и $P_2(3; 1; 2)$ параллельно оси Oy;
3) через точки $Q_1(3; -2; 5)$ и $Q_2(2; 3; 1)$ параллельно оси Oz.

3.243. Найти точки пересечения плоскости $2x-3y-4z-24=0$ с осями координат.

3.244. Найти отрезки, отсекаемые плоскостью $3x-4y-24z+12=0$ на координатных осях.

3.245. Вычислить площадь треугольника, который отсекает плоскость $5x-6y+3z+120=0$ от координатного угла Oxy.

3.246. Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью $2x-3y+6z-12=0$ и координатными плоскостями.

3.247. Плоскость проходит через точку $M_1(6; -10; 1)$ и отсекает на оси абсцисс отрезок $a= -3$ и на оси аппликат отрезок $c=2$. Составить для этой плоскости уравнение «в отрезках».