Задачи для самостоятельного решения

1.1. Найти действительную и мнимую части комплексного числа.

1) $z=(-\pi,-6)$;

2) $z=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$;

3) $z=\left(\sqrt{2},-\sqrt{3}\right)$;

4) $z=\left(-\frac{1}{4},\sqrt{5}\right)$.

1.2. Найти, при каком значении x действительная часть комплексного числа равна коэффициенту его мнимой части.

1) $z=2x-3i$;

2) $z=0{,}5-(x-1)i$;

3) $z=(x+2)+i$;

4) $z=-1+5xi$.

1.3. Выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме.

1) $\left(i^3+4i^4\right)+\left(i^2-3(-i)^3\right)$;

2) $\frac{5-4i}{-3+2i}$;

3) $\left(-3+\sqrt{2}i\right)\left(1/3-1/2i\right)$;

4) $\frac{5}{1+2i}+\frac{5}{2-i}$.

1.4. Проверить тождество $x^4+4=(x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i)$.

1.5. Решить уравнение.

1) $x^2+3+4i=0$;

2) $(2+i)z=3-i$;

3) $iz+2\bar{z}+z\bar{z}=5+5i$;

4) $z\cdot\bar{z}+3\left(z-\bar{z}\right)=4+3i$;

5) $(1-i)-z=2+\sqrt{3}i$;

6) $2z+3\bar{z}=5+2i$.

1.6. Решить систему уравнений.

1) $\begin{cases} ix+(1+i)y=3-i \\ (1-i)x-(6-i)y=4 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} x+yi-2z=10 \\ x-y+2iz=20 \\ ix+3iy-(1+i)z=30 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} 7z_1+2\overline{z_2}=7-4i \\ 3\overline{z_1}-z_2=3-2i \end{cases}$;

4) $\begin{cases} (1+i)x+(1+2i)y+(1+3i)z+(1+4i)t=1+5i \\ (3-i)x+(4-2i)y+(1+i)z+4it=2-i \end{cases}$.

x,y,z,t – вещественные.

1.7. Построить точки, изображающие комплексные числа.

1) $-1+i$;
2) $-\sqrt{3}-6i$;
3) $2i$;
4) -1.

1.8. Найти модуль и аргумент комплексного числа.

1) $3-4i$;
2) $-7+i$;
3) $1-3i$;
4) $\sqrt{5}+2i$;
5) $-8-6i$;
6) $-1-i$.

1.9. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих следующим условиям.

1) $|z|=1$;
2) $(\operatorname{Re} z)(\operatorname{Im} z)=1$;
3) $|z-3+4i|=2$;
4) $\arg z=\pi$;
5) $|z-i|=1,\ \arg z=\pi/2$;
6) $|z+i-1|>|z+1+3i|$.

1.10. Используя геометрическое истолкование действий над комплексными числами, найти длины сторон и внутренние углы треугольника, вершинами которого являются точки $z_1=3+i$, $z_1=5+3i$ и $z_1=\left(7-2\sqrt{3}\right)+3i$.

1.11. Найти $\operatorname{Im}\bar{z}$, если $z=\dfrac{i}{1-2i}$.

1.12. Найти $\operatorname{Re}\bar{z}$, если $z=\left(\dfrac{2-i}{1+i}\right)^3$.

1.13. Представить в тригонометрической и показательной формах следующие комплексные числа.

1) $1+i$;
2) $1+\sqrt{3}i$;
3) $2+2i$;
4) $\sqrt{3}-i$;
5) $2i$;
6) $-12+12i$.

1.14. Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

1) $\dfrac{\cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8}}{\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}}$;

2) $\left(\cos 15^\circ + i15^\circ\right)^8$;

3) $\dfrac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\psi-i\sin\psi}$;

4) $4\left(\cos\frac{\pi}{10}+i\sin\frac{\pi}{10}\right)\left(\cos\frac{3\pi}{20}+i\sin\frac{3\pi}{20}\right)$.

1.15. Вычислить.

1) $\left(1-i\sqrt{3}\right)^5$;

2) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$;

3) $(1+i)^8\left(1-i\sqrt{3}\right)^6$;

4) $\dfrac{16i\left(\sin\frac{\pi}{3}-i\cos\frac{\pi}{3}\right)}{\left(\sqrt{3}+i\right)^4}$.

1.16. Извлечь корни.

1) $\sqrt{i}$;

2) $\sqrt[4]{\dfrac{1+i}{1-i}}$;

3) $\sqrt[3]{-1+i}$;

4) $\sqrt[3]{2-2i}$;

5) $\sqrt[6]{\dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$;

6) $\sqrt[5]{-1}$.

1.17. Решить уравнение.

1) $z^2=-81$;

2) $z^2=8+6i$;

3) $z^2-8z+41=0$;

4) $z^3=-8$.

1.18. Доказать равенство

$$\left(\frac{1+itg\alpha}{1-itg\alpha}\right)^n=\frac{1+itgn\alpha}{1-itgn\alpha},\qquad n\in N.$$

1.19. Вычислить определитель.

1) $\begin{vmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} \omega & \omega \\ -1 & \omega \end{vmatrix}$, $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$;

4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}$, $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$.

1.20. При каком действительном a выражение $\dfrac{a\left(\cos 75^\circ + i\sin 75^\circ\right)^{12}}{i(a+2i)^2 - (14-3ai) - 2}$ является действительным числом?

1.21. Найти числа, сопряжённые своему кубу.

1.22. Доказать свойства сопряженных чисел.

1) $\bar{\bar{z}} = z$;

2) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$;

3) $\overline{z_1 \div z_2} = \bar{z}_1 \div \bar{z}_2$;

4) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$;

5) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$;

6) $|z| = |\bar{z}|$.