Глава 3. ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Аналитическая геометрия – раздел геометрии, в котором простейшие геометрические образы (прямые, плоскости, линии и поверхности второго порядка) исследуются средствами алгебры на основе метода координат. В данном разделе будет использована декартова прямоугольная система координат.

3.1. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости

К простейшим задачам аналитической геометрии относятся задачи о нахождении проекции отрезка, нахождении расстояния между двумя точками, делении отрезка в данном отношении, нахождении площади треугольника.

Проекция отрезка. Расстояние между двумя точками. Пусть дан произвольный отрезок M_1M_2 и некоторая ось u (рис. 3.1).

Проекцией точки M_1 на ось u называется основание P_1 перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на ось u.

Проекцией направленного отрезка M_1M_2 на ось u называется величина отрезка P_1P_2 оси u, началом и концом которого служат соответственно проекции точек M_1 и M_2 на эту ось, что символически записывается равенством $пр_u\, M_1M_2=P_1P_2$.

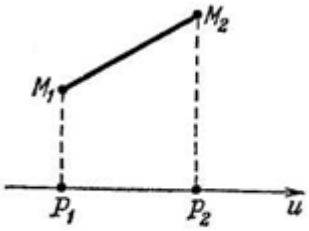
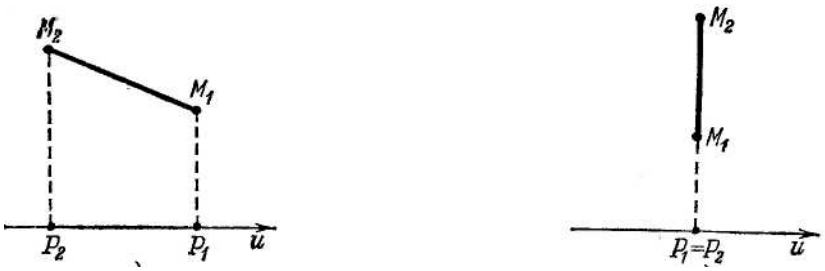


Рис. 3.1

Таким образом, проекция отрезка на ось есть *число*; оно может быть положительным (см. рис. 3.1), отрицательным (рис. 3.2, а) или равным нулю (рис. 3.2, б).



а) б)

Рис. 3.2

Если на плоскости задана система декартовых прямоугольных координат, то проекция отрезка на ось *Ox* обозначается символом *X,* его проекция на ось *Oy* – символом *Y.*

Проекции направленного отрезка M_1M_2 на оси координат *Ox* и *Oy* обозначаются соответственно через *X* и *Y*, причем, если известны координаты точек $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, то $X = x_2 - x_1$ и $Y = y_2 - y_1$.

Таким образом, чтобы найти проекции направленного отрезка на оси координат, нужно от координат его конца отнять соответствующие координаты начала (рис. 3.3).

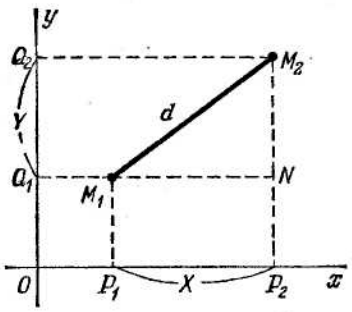


Рис. 3.3

Из прямоугольного треугольника M_1NM_2 на рис. 3.3 следует, что расстояние *d* между любыми двумя точками плоскости $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ определяется формулой

$$d=\sqrt{X^2+Y^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,. \qquad (3.1)$$

Рассмотрим отрезок M_1M_2. Проведем через его начальную точку M_1 луч *u*, параллельный оси *Ox* и направленный в ту же сторону (рис. 3.4).

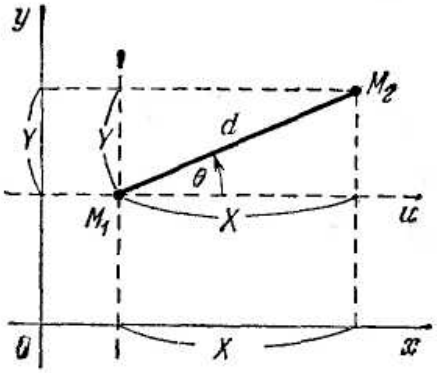


Рис. 3.4

Обозначим через θ угол, на который следует повернуть луч *u* против часовой стрелки около точки M_1, чтобы направление луча и совпало с направлением отрезка M_1M_2.

Угол θ будем называть полярным углом отрезка M_1M_2 относительно данных координатных осей. Примем теперь точку M_1 в качестве начала новой декартовой системы координат, оси которой направлены так же, как оси исходной системы координат (на рис. 3.4 новые оси показаны пунктиром). Проекции отрезка M_1M_2 на соответственные оси старой и новой системы одинаковы: обозначим их как и раньше через X, Y. Числа X, Y являются декартовыми координатами точки M_2 в новой системе. Из геометрических соображений очевидно, что

$$X = d\cos\theta, \quad Y = d\sin\theta. \tag{3.2}$$

В координатной форме соотношения (3.2) примут вид:

$$x_2 - x_1 = d\cos\theta, \quad y_2 - y_1 = d\sin\theta. \tag{3.3}$$

Во многих случаях удобной является также формула

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \tag{3.4}$$

которая очевидным образом выводится из формул (3.3).

Деление отрезка в данном отношении. Если точка $M(x; y)$ лежит на прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, и дано отношение $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$, в котором точка M делит отрезок M_1M_2 (исключая совпадение с точкой M_2), то координаты точки M определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{3.5}$$

Замечание. Если точка M находится между точками M_1 и M_2, то число λ положительное. Если точка M находится на прямой, определяемой точками M_1 и M_2, вне отрезка M_1M_2, то λ есть число отрицательное.

Если точка M является серединой отрезка M_1M_2, то ее координаты определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{3.6}$$

Площадь треугольника. Каковы бы ни были три точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, не лежащие на одной прямой, площадь S треугольника ABC определяется формулой

$$S = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right|. \tag{3.7}$$

Пример 3.1. Даны точки $M_1(1; 1)$ и $M_2(7; 4)$. На определяемой ими прямой найти точку M, которая в два раза ближе к M_1 чем к M_2, и находится:

а) между точками M_1 и M_2;

б) вне отрезка, ограниченного точками M_1 и M_2.

Решение: а) искомая точка делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = \frac{1}{2}$. Применяя формулы (3.5), находим координаты этой точки: x=3, y=2;

б) искомая точка делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = -\frac{1}{2}$. Применяя формулы (3.5), находим координаты этой точки: x= –5, y= –2.

Пример 3.2. Даны вершины треугольника $A(5; -1)$, $B(-1; 7)$, $C(1; 2)$. Найти длину его внутренней биссектрисы, проведенной из вершины A.

Решение. Обозначим через M точку пересечения указанной биссектрисы со стороной BC, через c и b – длины сторон AB и AC. Как известно из элементарной геометрии, биссектриса, проведенная из какой-нибудь вершины треугольника, делит противолежащую этой вершине сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Таким образом, точка M делит отрезок BC в отношении λ где $\lambda = \frac{BM}{MC} = \frac{c}{b}$.

Пользуясь формулой (3.1), находим длины сторон AB и AC

$$c = \sqrt{(5+1)^2 + (-1-7)^2} = 10, \quad b = \sqrt{(5-1)^2 + (-1-2)^2} = 5.$$

Следовательно, $\lambda = 2$. Применяя формулы (3.5), находим координаты точки M:

$$x = \frac{1}{3},\ y = \frac{11}{3}.$$

По формуле (3.1) получаем искомую длину биссектрисы AM

$$|AM| = \sqrt{\left(5 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(-1 - \frac{11}{3}\right)^2} = \frac{14}{3}\sqrt{2}.$$

Пример 3.3. Найти проекции отрезка на координатные оси, зная его длину $d = 2\sqrt{2}$ и полярный угол θ=135°.

Решение. По формулам (3.2) находим

$$X = 2\sqrt{2}\cos 135^\circ = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2, \qquad Y = 2\sqrt{2}\sin 135^\circ = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2.$$

Пример 3.4. Найти полярный угол отрезка, направленного из точки $M_1(5;\ \sqrt{3})$ в точку $M_2(6;\ 2\sqrt{3})$.

Р е ш е н и е. По формуле (3.1) $d=\sqrt{(6-5)^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{3})^2}=2$.

Применяя формулы (3.2), найдем $\cos\theta=\dfrac{6-5}{2}=\dfrac{1}{2}$, $\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно, θ=60°.

Пример 3.5. Даны точки $A(1;\ 1)$, $B(6;\ 4)$, $C(8;\ 2)$. Найти площадь треугольника ABC.

Р е ш е н и е. По формуле (3.7)

$$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}\right|=|-8|=S.$$

Следовательно, S=8.

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Построить на чертеже отрезки, исходящие из начала координат, зная их проекции на координатные оси:

1) $X = 3$, $Y = 2$; 2) $X = 2$, $Y =-5$; 3) $X = -5$, $Y = 0$; 4) $X = -5$, $Y = -1$.

3.2. Построить на чертеже отрезки, имеющие началом точку $M(2;\ -1)$, зная их проекции на координатные оси:

а) $X = 4$, $Y = 3$; б) $X = 2$, $Y = 0$; в) $X =-4$, $Y = -2$; г) $X = 1$, $Y = -3$.

3.3. Даны точки $M_1(1;\ -2)$, $M_1(2;\ 1)$, $M_2(5;\ 0)$, $M_3(-1;\ 4)$ и $M_4(0;\ -3)$.

Найти проекции на координатные оси следующих отрезков:

1) M_1M_2; 2) M_3M_2; 3) M_4M_5; 4) M_5M_3.

3.4. Даны проекции отрезка M_1M_2 на оси координат: $X= 5$, $Y =-4$. Зная, что его начало лежит в точке $M_1(-2;\ 3)$, найти координаты его конца.

3.5. Даны проекции отрезка AB на оси координат: $X= 4$, $Y =-5$. Зная, что его конец есть точка $B(1;\ -3)$, найти координаты его начала.

3.6. Построить на чертеже отрезки, исходящие из начала координат, зная длину d и полярный угол θ каждого из них:

I) $d = 5$, $\theta=\dfrac{\pi}{5}$; 2) $d = 3$, $\theta=\dfrac{5}{6}\pi$; 3) $d = 4$, $\theta=-\dfrac{\pi}{3}$.