Элементы векторной алгебры

§ 1 Основные понятия

Определение. ***Вектором*** (свободным вектором) называется направленный отрезок, который можно перемещать в пространстве параллельно самому себе.

Обозначение: $\bar{a}$, $\overline{AB}$.

Определение. ***Длиной (модулем)*** вектора называется длина порождающего его отрезка.

Обозначение: $|\bar{a}|$, $|\overline{AB}|$.

Определение. Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется ***нулевым.***

Обозначение: $\bar{0}$, где $|\bar{0}| = 0$, направление не определено.

Определение. Вектор, длина которого равна единице, называется ***единичным.***

Обозначение: $\bar{e}$, где $|\bar{e}| = 1$.

Определение. Векторы, имеющие равные длины и одинаковые направления, называются ***равными.***

Определение. Векторы, лежащие на одной прямой линии или на параллельных прямых линиях, называются ***коллинеарными.***

Они могут быть ***сонаправленными*** $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$ или ***противоположно направленными*** $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$.

Определение. Векторы, лежащие в одной плоскости или параллельных плоскостях, называются ***компланарными.***

Определение. ***Углом между двумя векторами*** называется угол φ (где $0^0 \le \varphi \le 180^0$), на который нужно повернуть один из них до совпадения его направления с направлением другого.

Обозначение: $\varphi = (\hat{\bar{a}; \bar{b}})$.

§ 2 Действия над векторами в геометрической форме

1. Сложение.

а) По правилу треугольника (см. рис. 1):

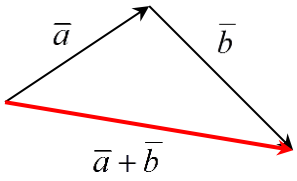

Рис. 1

б) По правилу параллелограмма (см. рис. 2):

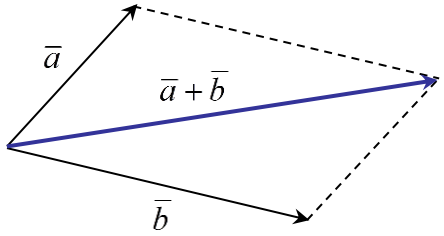

Рис. 2

в) По правилу многоугольника (см. рис. 3):

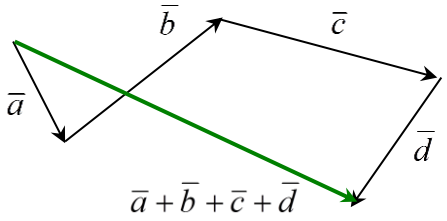

Рис. 3

2. Вычитание. (см. рис. 4): $\bar{a}-\bar{b}=-\bar{b}+\bar{a}$.

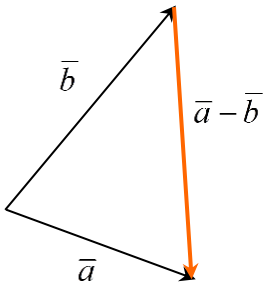

Рис. 4

3. Умножение вектора на число.

Получается вектор $\bar{b}=k\cdot\bar{a}$, коллинеарный данному вектору $\bar{a}$, длина которого определяется по формуле $|\bar{b}|=|k|\cdot|\bar{a}|$.

а) Изменения длины получаемого вектора:

- при значении $|k|>1$ увеличивается в k раз;

- при значении $|k|<1$ уменьшается в k раз;

- при значении $|k|=1$ остаётся неизменной.

б) Изменения направления получаемого вектора:

- при значении $k>0$ получаем $\bar{b}\uparrow\uparrow\bar{a}$;

- при значении $k<0$ получаем $\bar{b}\uparrow\downarrow\bar{a}$;

- при значении $k=0$ получаем $\bar{b}=\bar{0}$, направление которого не определено.

§ 3 Проекция вектора на ось

Вектор $\overline{AB}$ проецируется на ось l, причём A' и B' - перпендикулярные проекции точек A и B на эту ось (см. рис. 5).

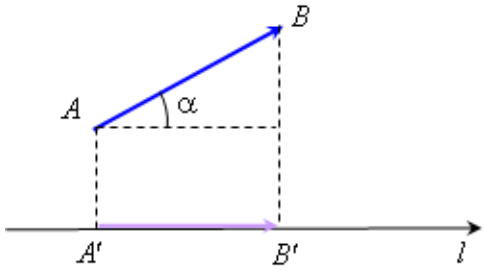

Рис. 5

Определение. ***Проекцией вектора*** $\overline{AB}$ ***на ось*** l называется число, равное длине вектора $\overline{A'B'}$, взятое со знаком «плюс», если вектор $\overline{A'B'}$ сонаправлен оси l, и со знаком «минус», если противоположнонаправлен.

$$np_l\overline{AB} = \begin{cases} \left|\overline{A'B'}\right|, \text{ если } \overline{A'B'} \uparrow\uparrow l, \\ -\left|\overline{A'B'}\right|, \text{ если } \overline{A'B'} \uparrow\downarrow l \end{cases}$$

Свойства проекции

1. $np_l\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos\alpha$, где $\alpha = (\hat{\bar{a}; l})$ (см. рис. 5).
2. $np_l\bar{a} = np_l\bar{b}$, если $\bar{a} = \bar{b}$.
3. $np_l(\bar{a} + \bar{b}) = np_l\bar{a} + np_l\bar{b}$.
4. $np_l\, k \cdot \bar{a} = k \cdot np_l\bar{a}$.

Определение. Проекция вектора на числовую ось называется ***координатой*** вектора.

§ 4 Базис. Разложение вектора по базису

Рассмотрим векторы в пространствах различной размерности.

1. Одномерное пространство.

Задана ось l. На ней указан единичный вектор $\bar{e}$. Тогда любой вектор $\bar{a}$ коллинеарен вектору $\bar{e}$. Значит, $\bar{a} = k \cdot \bar{e}$, где k - координата вектора $\bar{a}$ в одномерном пространстве, $k = np_l\bar{a}$ (см. рис. 6).

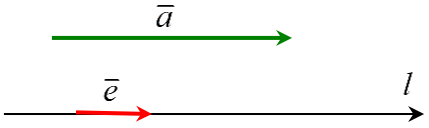

Рис. 6

2. Двумерное пространство.

Заданы оси l_1 и l_2, на которых указаны единичные векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$. Тогда любой вектор $\bar{a}$ можно представить по правилу сложения в виде $\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2$, где $\bar{a}_1 = k_1 \cdot \bar{e}_1$ и $\bar{a}_2 = k_2 \cdot \bar{e}_2$ (см. рис. 7).

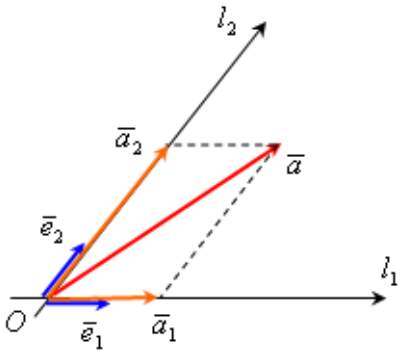

Рис. 7

Получим $\bar{a} = k_1\bar{e}_1 + k_2\bar{e}_2$ - линейная комбинация векторов $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$, где k_1 и k_2 - координаты вектора $\bar{a}$, единичные векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ неколлинеарны.

3. Трёхмерное пространство.

Аналогично задаётся три оси l_1, l_2 и l_3, на которых указаны единичные векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$. Тогда $\bar{a} = k_1\bar{e}_1 + k_2\bar{e}_2 + k_3\bar{e}_3$ - линейная комбинация векторов $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, где k_1, k_2, k_3 - координаты вектора $\bar{a}$, единичные векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ некомпланарны.

Определение. Любая пара неколлинеарных векторов $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ на плоскости и любая тройка некомпланарных векторов $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ в трёхмерном пространстве, взятых в определённом порядке, называется ***базисом*** всех векторов плоскости или пространства.

Обозначение: $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ или $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

Определение. Векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ называются ***базисными векторами.***

Определение. Представление вектора в виде $\bar{a} = k_1\bar{e}_1 + k_2\bar{e}_2$ или $\bar{a} = k_1\bar{e}_1 + k_2\bar{e}_2 + k_3\bar{e}_3$ называется ***разложением вектора*** $\bar{a}$ ***по базису*** $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ ***или*** $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

Для того чтобы векторы образовали базис, необходимо, чтобы они были линейно-независимыми.

Определение. Векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ (или $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$) называются ***линейно-независимыми,*** если равенство $\alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 = 0$ (или $\alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \alpha_3\bar{e}_3 = 0$) выполняется только, если $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ (или $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$). В противном случае векторы ***линейно-зависимые.***

Теорема. Любой вектор можно единственным образом разложить по данному базису.

§ 5 Прямоугольная декартова система координат в трёхмерном пространстве R^3

Такая система считается заданной, если:

1) указаны три взаимно перпендикулярные оси Ox, Oy и Oz, пересекающиеся в точке O - начале координат;

2) выбран прямоугольный базис $\{\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}\}$.

Определение. Векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ называются ***базисными ортами***.

Векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ являются единичными векторами, они направлены по соответствующим осям Ox, Oy и Oz, $|\bar{i}|=|\bar{j}|=|\bar{k}|=1$, $\bar{i}\perp\bar{j}\perp\bar{k}$.

В математике чаще применяют правую систему координат: три оси расположены так, что если смотреть в направлении оси Oz, то поворот от оси Ox к оси Oy совершается по часовой стрелке (см. рис. 8).

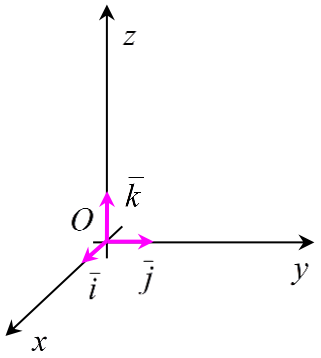

Рис. 8

Система координат позволяет перейти к аналитическому описанию вектора.

Каждой точке пространства соответствует её ***радиус – вектор*** $\overline{OA}$ или $\bar{r}$ с началом в точке O (см. рис 9).

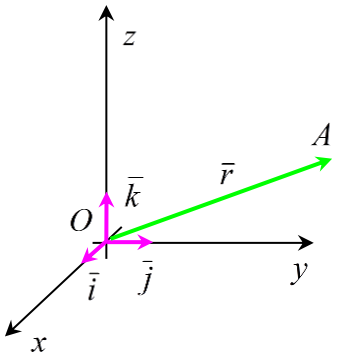

Рис. 9

Тогда проекции этого вектора на оси координат являются координатами вектора $\bar{r}=(x;\ y;\ z)$.

А так как любой вектор можно перевести в положение радиус вектора, то можно найти координаты вектора.

$\bar{a}=(x;\ y;\ z)$ - ***координаты вектора в пространстве*** R^3**.**

$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ - ***разложение вектора*** $\bar{a}$ ***по базису*** $\{\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}\}$.

Базисные векторы в пространстве R^3 имеют координаты $\bar{i} = (1;\ 0;\ 0)$, $\bar{j} = (0;\ 1;\ 0)$, $\bar{k} = (0;\ 0;\ 1)$.

Если вектор задан координатами начала $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и конца $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то его координаты находятся вычитанием из координат конца координат начала, то есть $\overline{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$.

§ 6 Длина и направление вектора

Дан вектор $\bar{a} = (x;\ y;\ z)$. Учитывая соотношения в прямоугольных треугольниках (см. рис. 10) $|OM|^2 = |OM'|^2 + z^2$ и $|OM'|^2 = x^2 + y^2$, получим:

$|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ - ***длина вектора*** $\bar{a} = (x;\ y;\ z)$.

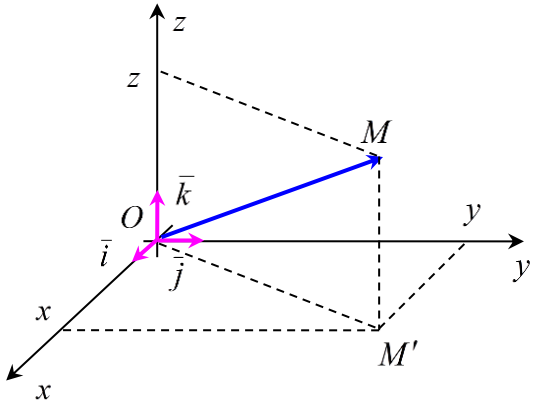

Рис. 10

Если вектор задан координатами начала $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и конца $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то его длина определяется по формуле $|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Направление вектора описывается направляющими косинусами (см. рис. 11).

Если $\bar{a} = (x;\ y;\ z)$, то $x = np_{Ox}\bar{a} = |\bar{a}|\cos\alpha$, $y = np_{Oy}\bar{a} = |\bar{a}|\cos\beta$, $z = np_{Oz}\bar{a} = |\bar{a}|\cos\gamma$.

Отсюда $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x}{|\bar{a}|}, \\ \cos\beta = \dfrac{y}{|\bar{a}|}, \\ \cos\gamma = \dfrac{z}{|\bar{a}|} \end{cases}$ - ***направляющие косинусы*** вектора $\bar{a} = (x;\ y;\ z)$.

Свойство направляющих косинусов

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

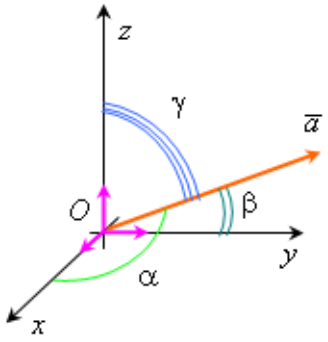

Рис. 11

§ 7 Действия над векторами в координатной форме

Даны векторы $\bar{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\bar{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$.

1. Сложение.

$$\bar{a} + \bar{b} = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2)$$

2. Вычитание.

$$\bar{a} - \bar{b} = (x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2)$$

3. Умножение на число.

$$k \cdot \bar{a} = (k \cdot x_1;\ k \cdot y_1;\ k \cdot z_1)$$

При умножении вектора на число получается коллинеарный ему вектор, то есть $k \cdot \bar{a} \parallel \bar{a}$.

Тогда если $k \cdot \bar{a} = \bar{b}$, то $k\,x_1 = x_2$, $k\,y_1 = y_2$, $k\,z_1 = z_2$.

Отсюда $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = k \neq 0$ - ***условие коллинеарности двух векторов.***

Два вектора коллинеарны, если их соответствующие координаты пропорциональны, и наоборот.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте понятие скалярных и векторных величин
2. Что называется вектором (свободным вектором)?
3. Сколько характеристик имеет вектор?
4. Что называется длиной вектора?
5. Дайте понятие нулевого и единичного вектора.
6. Какие векторы называются равными?
7. Какие векторы называются коллинеарными? сонаправленными? противоположно направленными?
8. Какие векторы называются компланарными?
9. Какую величину называют углом между двумя векторами?
10. Какие действия можно выполнять над векторами в геометрической форме? Как они осуществляются?

11. Что называется проекцией вектора на ось?

12. Сформулируйте свойства проекции вектора на ось.

13. Что называется координатой вектора?

14. Что называется линейной комбинацией векторов?

15. Что называется базисом векторов на плоскости (в трёхмерном пространстве)?

16. Как записывается разложение вектора по базису?

17. Какие векторы называются линейно-зависимыми? линейно-независимыми?

18. Сколькими способами можно разложить вектор по данному базису?

19. Как задаётся прямоугольная декартова система координат в трёхмерном пространстве R^3?

20. Какие векторы называются базисными ортами?

21. Что такое радиус-вектор точки?

22. Как записывается разложение вектора по базису в трёхмерном пространстве?

23. Как определяются координаты вектора, если известны координаты его начала и конца?

24. Как найти длину вектора в координатной форме?

25. Как найти направление вектора в координатной форме?

26. Сформулируйте свойство направляющих косинусов вектора.

27. Как выполняются линейные операции над векторами, заданными в координатной форме?

28. Сформулируйте условие коллинеарности двух векторов.

29. Что называется скалярным произведением векторов?

30. Запишите формулу для нахождения скалярного произведения векторов по определению и в координатной форме.

31. Запишите свойства скалярного произведения векторов.

32. Приведите примеры применения скалярного произведения векторов. Запишите соответствующие формулы.

33. Что называется векторным произведением векторов?

34. Запишите свойства векторного произведения векторов.

35. Запишите формулу для нахождения векторного произведения векторов по определению и в координатной форме.

36. Приведите примеры применения векторного произведения векторов. Запишите соответствующие формулы.