СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными записывается в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

где через a_{ij} обозначен коэффициент при неизвестном x_j в i-м уравнении системы; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные; числа $b_1, b_2, \ldots, b_m$ называются *свободными членами*.

Таблица коэффициентов при неизвестных называется *матрицей системы*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ столбец } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ – } \textit{столбцом неизвестных},$$

а столбец $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ – *столбцом свободных членов.*

Если $m = n$, то определитель матрицы A чаще всего обозначается Δ и называется *определителем системы*.

Решение системы – множество чисел x_1, $x_2, \ldots,$ x_n таких, что при подстановке их в уравнения системы каждое уравнение обращается в тождество.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется *частным решением* системы. Совокупность всех частных решений называется *общим решением*.

ТЕОРЕМА. (Кронекера-Капелли, критерий совместности системы линейных уравнений) Для того чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее основной матрицы был равен рангу расширенной (без доказательства).

ПРИМЕР.

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=1 \end{cases} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \Delta A=-2 \quad \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases} - \textit{единственное решение системы},$$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=3 \end{cases} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \ \overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ r_A=1, r_{\overline{A}}=2 \ - \textit{решений нет},$$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \end{cases} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \ \overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, r_A=1, r_{\overline{A}}=1 - \textit{решений бесконечно много}:$$

$$y=2-x, x\in R.$$

Решить систему – это значит выяснить, совместна она или несовместна. Если система совместна, найти ее общее решение.

Две системы называются *эквивалентными (равносильными)*, если они имеют одно и то же общее решение.

Эквивалентные системы получаются, в частности, при элементарных преобразованиях строк матрицы.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если все свободные члены равны нулю. Однородная система всегда совместна, т.к. $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ является решением системы.

2. Методы решения систем уравнения

Метод Крамера

Теорема Крамера. Если определитель матрицы квадратной системы не равен нулю, то система совместна и имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta},$$

где Δ - определитель матрицы системы, Δ_i - определитель матрицы системы, где вместо i -го столбца стоит столбец правых частей.

Если определитель системы равен нулю, то система может быть как совместной, так и несовместной.

Система линейных уравнений с вещественными коэффициентами:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

В определителях столбец коэффициентов при соответствующей неизвестной заменяется столбцом свободных членов системы.

Решение:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Задание. При помощи формул Крамера найти решение системы $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

Решение. Вычисляем определитель матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 3 -$$

$$-3 \cdot (-1) \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 2 = -4 \neq 0$$

Так как определитель матрицы системы неравен нулю, то по теореме Крамера система совместна и имеет единственное решение. Для его нахождения вычислим следующие определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) \cdot 1 +$$

$$+ 1 \cdot 0 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \cdot 2 - (-2) \cdot 1 \cdot 2 = 4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 3 -$$

$$-3 \cdot (-2) \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 2 = -4$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot 2 +$$

$$+1 \cdot (-2) \cdot 3 - 3 \cdot (-1) \cdot 2 - (-1) \cdot (-2) \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 2 = -12$$

Таким образом,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{-4} = -1 \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1 \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-12}{-4} = 3$$

Ответ. $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

Задание. Найти решение СЛАУ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$ при помощи метода Крамера.

Решение. Вычисляем определитель матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \neq 0$$

Так как $\Delta \neq 0$, то по теореме Крамера система совместна и имеет единственное решение. Вычислим вспомогательные определители. Определитель Δ_1 получим из определителя Δ заменой его первого столбца столбцом свободных коэффициентов. Будем иметь:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 18 = -11$$

Аналогично, определитель Δ_2 получается из определителя матрицы системы Δ заменой второго столбца столбцом свободных коэффициентов:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 14 = 31$$

Тогда получаем, что

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-11}{1} = -11, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{31}{1} = 31$$

Ответ. $x_1 = -11, x_2 = 31$

Δ

Пример. Решим систему $\begin{cases} 2x & -3y & +z & = 0 \\ x & +2y & -z & = 3 \\ 3x & +5y & & = 3 \end{cases}$.

Решение: определитель системы $\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$.

Вычислим определители для неизвестных $\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 18$,

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -36$.

Теперь, по формулам Крамера: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{18}{18} = 1$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{0}{18} = 0$,

$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-36}{18} = -2$. ❐

Метод Гаусса

Этим методом можно решить любую систему линейных уравнений (1.14) или доказать, что она несовместна. Он состоит в последовательном исключении неизвестных системы (1.14) по следующей схеме: выписывается расширенная матрица системы $\overline{A}$ и приводится к наиболее простому виду – треугольному или виду трапеции – с помощью следующих преобразований над ее *строками*:

1) перемена местами двух строк (уравнений);

2) умножение любой строки (уравнения) на число $\alpha \neq 0$;

3) отбрасывание одной из двух равных или пропорциональных строк (уравнений) ;

4) прибавление к любой строке (уравнению) другой строки (уравнения), умноженной на число α.

После выполнения преобразований возможны три случая:

а) $\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & \vdots \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right)$. В этом случае A эквивалентна треугольной матрице и $r = n$, значит, решение системы единственно. Последовательно вычисляя неизвестные снизу вверх, находим решение системы.

б) $\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & * & * & * \end{array}\right)$. В этом случае A эквивалентна трапециевидной матрице, значит, $r < n$ и система имеет бесконечное множество решений: $(n - r)$ переменных перенесем вправо и будем считать их свободными (известными), тогда оставшиеся r переменных определятся единственным образом как функции свободных.

в) $\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b \neq 0 \end{array}\right)$. В этом случае $r_A \neq r_{\overline{A}}$, и система несовместна.

Пример

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Смотрим на левую верхнюю «ступеньку». Там у нас должна быть единица. Проблема состоит в том, что в первом столбце единиц нет вообще, поэтому перестановкой строк ничего не решить. В таких случаях единицу нужно организовать с помощью элементарного преобразования. Обычно это можно сделать несколькими способами. Я поступил так:
(1) **К первой строке прибавляем вторую строку, умноженную на –1**. То есть, мысленно умножили вторую строку на –1 и выполнили сложение первой и второй строки, при этом вторая строка у нас не изменилась.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Теперь слева вверху «минус один», что нас вполне устроит. Кто хочет получить +1, может выполнить дополнительное телодвижение: умножить первую строку на –1 (сменить у неё знак).

Дальше алгоритм работает уже по накатанной колее:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 3 & 3\end{array}\right)\xrightarrow{(5)}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

(2) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на 5. К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на 3.

(3) Первую строку умножили на –1, в принципе, это для красоты. У третьей строки также сменили знак и переставили её на второе место, таким образом, на второй «ступеньке у нас появилась нужная единица.

(4) К третьей строке прибавили вторую строку, умноженную на 2.

(5) Третью строку разделили на 3.

Скверным признаком, который свидетельствует об ошибке в вычислениях (реже – об опечатке), является «плохая» нижняя строка. То есть, если бы у нас внизу получилось что-нибудь вроде $\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & 11 & 23\end{array}\right)$, и, соответственно, $11x_3 = 23 \Rightarrow x_3 = \frac{23}{11}$, то с большой долей вероятности можно утверждать, что допущена ошибка в ходе элементарных преобразований.

Заряжаем обратный ход, в оформлении примеров часто не переписывают саму систему, а уравнения «берут прямо из приведенной матрицы». Обратный ход, напоминаю, работает, снизу вверх. Да тут подарок получился:

$x_3 = 1$

$x_2 = 3$

$x_1 + x_2 - x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + 3 - 1 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$

Ответ: $x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = 1$.

Пример 4: ***Решение****: Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 7 & 3 & 18 \\ -7 & -4 & -4 & -11 \\ -6 & 5 & -4 & -15 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 7 \\ -7 & -4 & -4 & -11 \\ -6 & 5 & -4 & -15 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 17 & -11 & 38 \\ 0 & 23 & -10 & 27 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 17 & -11 & 38 \\ 0 & 6 & 1 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & -14 & 71 \\ 0 & 6 & 1 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow{(5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & -14 & 71 \\ 0 & 0 & -83 & 415 \end{array}\right) \xrightarrow{(6)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 14 & -71 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

Выполненные преобразования:
(1) К первой строке прибавили вторую. Таким образом, организована нужная единица на левой верхней «ступеньке».
(2) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на 7. К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на 6.

Со второй «ступенькой» всё хуже*, «кандидаты» на неё – числа 17 и 23, а нам нужна либо единичка, либо –1. Преобразования (3) и (4) будут направлены на получение нужной единицы*

(3) К третьей строке прибавили вторую, умноженную на –1.
(4) Ко второй строке прибавили третью, умноженную на –3.
Нужная вещь на второй ступеньке получена*.*
(5) К третьей строке прибавили вторую, умноженную на 6.
(6) Вторую строку умножили на –1, третью строку разделили на -83.

Обратный ход: $x_3 = -5$

$x_2 + 14x_3 = -71 \Rightarrow x_2 - 70 = -71 \Rightarrow x_2 = -1$

$x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \Rightarrow x_1 - 3 + 5 = 7 \Rightarrow x_1 = 5$

Ответ*:* $x_1 = 5,\ x_2 = -1,\ x_3 = -5$

$t = -1$

$z = (16 - 14t) : 15 = 30 : 15 = 2$

$-y = 7 - 7z - 4t = 7 - 14 + 4 = -3, y = 3$

$x = -1 + 2y - 3z - t = -1 + 6 - 6 + 1 = 0.$

Ответ: $(0;\ 3;\ 2;\ -1)$.

Решение систем уравнений с помощью обратной матрицы

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными (см.(1.2)).

Обозначим

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\, a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Учитывая правило умножения матриц, систему (1.2) запишем в матричном виде:

$$A\cdot X=B. \qquad (1.4)$$

Решим уравнение (1.4). Если $\det A\neq 0$, то к матрице A существует обратная матрица A^{-1}. Умножим слева обе части уравнения (1.4) на A^{-1}. Получаем: $A^{-1}AX=A^{-1}B$. Так как $A^{-1}A=E$ *и* $EX=X$, то $X=A^{-1}B$.

Пример 1.17. Решить с помощью обратной матрицы систему уравнений

$$\begin{cases} 3x+2y+z=2, \\ 2x-y+2z=-2, \\ 4x+3y-z=1, \end{cases}$$

которая приведена в примере 1.16.

Решение. В данном примере

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Прежде всего найдем матрицу A^{-1}. $\det A=15$ (см. пример 1.16). Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-5, \quad A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=10, \quad A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=10,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7.$$

Отсюда по теореме 1.2 получаем

$$A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 5 \\ 10 & -7 & -4 \\ 10 & -1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{7}{15} & -\frac{4}{15} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{15} & -\frac{7}{15} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{7}{15} & -\frac{4}{15} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{15} & -\frac{7}{15} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то есть

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $x = -1,\ y = 2,\ z = 1.$

Ответ: $x = -1,\ y = 2,\ z = 1.$

Задания

Пример 1

: Решить систему методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=4 \\ 9x+5y+3z=0 \\ 4x-2z=-10 \end{cases}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 9 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 90.$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -10 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -180,\ \Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 9 & 0 & 3 \\ 4 & -10 & -2 \end{vmatrix} = 270,\ \Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 9 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -10 \end{vmatrix} = 90$$

$x=-2,\ y=3,\ z=1.$

Ответ: $(-2,3,1)$.

Пример 2

Пример 2: Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x-2y+3z+t=-1 \\ -2x+3y+z+2t=9 \\ 5x-6y+2z+3t=-17 \\ 2x-4y+4z+3t=-7 \end{cases}$$

Решение: Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к треугольной форме путем элементарных преобразований (они указаны справа у каждой строки).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 2 & 9 \\ 5 & -6 & 2 & 3 & -17 \\ 2 & -4 & 4 & 3 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II+I \\ III-5I \\ IV-2I \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & 4 & 7 \\ 0 & 4 & -13 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III+4II \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 15 & 16 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III\cdot 2 \\ IV\cdot 15 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 30 & 28 & 32 \\ 0 & 0 & -30 & 15 & -75 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III\cdot\frac{1}{2} \\ IV+III \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 15 & 14 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 43 & -43 \end{array}\right)$$

Запишем систему, соответствующую последней расширенной матрице, и найдем неизвестные.

$$\begin{cases} x-2y+3z+t=-1 \\ -y+7z+4t=7 \\ 15z+14t=16 \\ 43t=-43 \end{cases}$$

$t=-1$

$z=(16-14t):15=30:15=2$

$-y=7-7z-4t=7-14+4=-3, y=3$

$x=-1+2y-3z-t=-1+6-6+1=0.$

Ответ: $(0;\ 3;\ 2;\ -1)$.

Задания для самостоятельной работы

1. С помощью формул Крамера решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 3x-8y=-2, \\ 2x+y=5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y=1, \\ 2x-y=-8. \end{cases}$ в) $\begin{cases} 9x-y=12, \\ x+5y=-14. \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x+7y-z=-5, \\ x-5y+2z=0, \\ 3x+y-3z=-9. \end{cases}$ д) $\begin{cases} 3x-y+8z=-7, \\ -x+2y-z=4, \\ 2x+3y-2z=10. \end{cases}$ е) $\begin{cases} 5x+3y-z=-7, \\ 3x-4y+2z=10, \\ x+y-3z=-5. \end{cases}$

Ответ: а) $x=2,\ y=1$; б) $x=-3,\ y=2$; в) $x=1,\ y=-3$;
г) $x=-2,\ y=0,\ z=1$; д) $x=1,\ y=2,\ z=-1$;
е) $x=0,\ y=-2,\ z=1$.

2. Методом обратной матрицы решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x-2y+3z=2, \\ 2x-y+4z=5, \\ 3x+3y-2z=4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-y-z=-5, \\ 5x+2y+3z=13, \\ x-y+2z=4. \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x-2y+z=-1, \\ x+3y-z=-2, \\ 3x-y+4z=1. \end{cases}$

Ответ: а) $x=1,\ y=1,\ z=1$; б) $x=0,\ y=2,\ z=3$; в) $x=-1,\ y=0,\ z=1$.

3. Методом Гаусса найти решение систем линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x+3y+z+2=0, \\ 2x-y+2z-3=0, \\ x+2y-z+5=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-y-z=4, \\ -x+3y-z=-6, \\ 3x+2y+z=5. \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-y-z-2=0, \\ 2x-y+3z-1=0, \\ x+2y-z-8=0. \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x+y-2z=-4, \\ x-2y+z=3, \\ -2x-3y+3z=10. \end{cases}$ д) $\begin{cases} -x+y-4z=1, \\ 2x-3y+z=2, \\ -3x+4y-5z=-1. \end{cases}$ е) $\begin{cases} x-3y-2z=5, \\ -3x+4y-z=-2, \\ -4x+y+z=-7. \end{cases}$

ж) $\begin{cases} -x+3y-4z=0, \\ 3x-2y-2z=0, \\ 2x+y-6z=0. \end{cases}$ з) $\begin{cases} x+2y-z=0, \\ 2x+y+5z=0. \end{cases}$

Ответ: а) $x=-1, y=-1, z=2$; б) $x=2, y=-1, z=1$; в) $x=3, y=2, z=-1$; г) решений нет; д) общее решение $x=-5-11z, y=-4-7z,\ z$ — любое число; е) общее решение $x=-\frac{14}{5}-\frac{11}{5}z, y=-\frac{13}{5}-\frac{7}{5}z,\ z$ — любое число; ж) $x=2z, y=2z,\ z$ — любое число; з) $x=-3z,\ y=z,\ z$ — любое число.