## Тема 6. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

## ПЗ №7. Функциональные ряды

## 1. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

### 1.1. Функциональные ряды

***Решение типовых примеров***

**61** Найти область сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}$.

Решение

По радикальному признаку Коши имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}{x}\right| = \left|\frac{1}{x}\right|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} = \left|\frac{e}{x}\right|.$$

Ряд будет сходиться при $\left|\frac{e}{x}\right| < 1$, следовательно, $\frac{e^2}{x^2} - 1 < 0$, $\frac{e^2 - x^2}{x^2} < 0$, так как $x^2 > 0$, то $e^2 - x^2 < 0$. Ряд сходится при $x \in (-\infty;-e) \cup (e;+\infty)$.

**62** Исследовать на равномерную сходимость

$$\sin x + \frac{1}{2^2}\sin^2 2x + \frac{1}{3^2}\sin^3 3x + \ldots + \frac{1}{n^2}\sin^n nx + \ldots.$$

Решение

Область определения $(-\infty;+\infty)$. Сравним данный ряд с числовым знакоположительным рядом $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$ - это обобщённый гармонический ряд, при $p = 2 > 1$ он сходится. Так как $\left|\frac{\sin^n nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$, то по признаку Вейерштрасса данный ряд равномерно сходится на всей оси *Ox*.

***Задания для самостоятельного решения***

Найти область сходимости рядов

**63** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lg x}}$;

**64** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}ne^{nx}$;

**65** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{\left(1+x^2\right)^n}$;

**66** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cosnx}{n\sqrt{n}}$;

**67** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$;

**68** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{nx}}$;

**69** $\sum_{n=1}^{\infty}ln^n\left(1+x^2\right)$;

**70** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^n}$;

**71** $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\,tg\frac{x}{2^n}$.

Исследовать на равномерную сходимость.

**72** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cosnx}{n^2}$;

**73** $\frac{\sin x}{1!}+\frac{\sin 2x}{2!}+...+\frac{\sin nx}{n!}+...$;

**74** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$;

**75** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$;

**76** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2+\left(4-x^2\right)^{n/2}}$;

**77** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n+\left(4-x^2\right)^{\frac{n}{2}}}$.

## 1.2. Степенные ряды

### *Решение типовых примеров*

**78** Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n3^n}{n!}$.

Решение

Воспользуемся формулой (10.14). $a_n=\frac{3^n}{n!}$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}\right|=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$$

Следовательно, ряд сходится на всей числовой оси.

**79** Найти область сходимости степенного ряда

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...+\left(-1\right)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+....$$

Решение

Заданный ряд не полный. Воспользуемся признаком Даламбера.

$$\left|u_n\right|=\left|\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right|,\qquad \left|u_{n+1}\right|=\left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{x^{2n-1}}\right|=\left|x^2\right|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=x^2.$$

Ряд абсолютно сходится, если $x^2<1$ или $-1<x<1$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x=-1,\qquad -1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-...,$ сходится по признаку Лейбница.

При $x=1,\qquad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...,$ тоже сходится по признаку Лейбница.

Следовательно, областью сходимости является отрезок $\left[-1;1\right]$.

**80** Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^{n-1}}$.

Решение

Находим радиус сходимости ряда по формуле (10.14)

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n\cdot 3^{n-1}}:\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)3^n}{n\cdot 3^{n-1}}=3.$$

Следовательно, ряд сходится при $-3<x-3<3$, то есть при $0<x<6$.

При $x=0,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-3\right)^n}{n}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n}$. Сходится по признаку Лейбница.

При $x=6,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Это гармонический ряд – расходится.

Следовательно, областью сходимости является интервал $\left[0;6\right)$.

***Задания для самостоятельного решения***

Найти область сходимости степенных рядов

**81** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}nx^n$;

**82** $1+\frac{x}{3\cdot 2}+\frac{x^2}{3^2\cdot 3}+\frac{x^3}{3^3\cdot 4}+\ldots;$

**83** $1+\frac{2x}{3^2\sqrt{3}}+\frac{4x^2}{5^2\sqrt{3^2}}+\frac{8x^3}{7^2\sqrt{3^3}}+\ldots;$

**84** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!};$

**85** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^{n-1}}{n};$

**86** $1+3x+\ldots+(n-1)3^{n-1}x^{n-1}+\ldots;$

**87** $x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}+\ldots;$

**88** $x+\frac{x^2}{20}+\ldots+\frac{x^n}{n\cdot 10^{n-1}}+\ldots;$

**89** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}(x+2)^n;$

**90** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-2)^n}{n^n};$

**91** $(x+1)+\frac{(x+1)^2}{2\cdot 4}+\frac{(x+1)^3}{3\cdot 4^2}+\frac{(x+1)^4}{4\cdot 4^3}+\ldots;$

**92** $(x-4)+\frac{(x-4)^2}{\sqrt{2}}+\frac{(x-4)^3}{\sqrt{3}}+\frac{(x-4)^4}{\sqrt{4}}+\ldots;$

**93** $\frac{x-1}{2}+\frac{(x-1)^2}{2^2}+\frac{(x-1)^3}{2^3}+\ldots.$

## 1.3. Ряды Тейлора и Маклорена

ряд Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots. \qquad (1)$$

Если в ряде Тейлора положить $x_0=0$, то получим ряд Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad (2)$$

***Разложения в ряд Маклорена типовых функций:***

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \qquad x\in(-\infty;\infty) \qquad (3)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots \quad x\in\left(-\infty;\infty\right) \qquad (4)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots \quad x\in\left(-\infty;\infty\right) \qquad (5)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots \quad x\in(-1;1] \qquad (6)$$

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots \quad x\in\left[-1;1\right] \qquad (7)$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots+$$

$$+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots, \quad x\in[-1;1] \qquad (8)$$

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

$$x\in\left\{\begin{matrix}\left[-1;1\right],m\ge 0\\(-1;1],-1<m<0\\(-1;1),m\le -1\end{matrix}\right\} \qquad (9)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots \qquad x\in(-1;1) \qquad (10)$$

***Решение типовых примеров***

**94** Разложить в ряд по степеням $x$ функцию $f(x)=2^x$.

Решение

Найдём значения функции и её производных при $x=0$:

$$f(x)=2^x, \qquad f(0)=1,$$
$$f'(x)=2^x \ln 2, \qquad f'(0)=\ln 2,$$
$$f''(x)=2^x \ln^2 2, \qquad f''(0)=\ln^2 2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$f^{(n)}(x)=2^x \ln^n 2, \qquad f^{(n)}(0)=\ln^n 2,$$

Так как $0<\ln 2<1$, то при фиксированном $x$ имеет место неравенство $\left|f^{(n)}(x)\right|<2^x$ для любого $n$. Следовательно, функция может быть представлена в виде суммы ряда Маклорена:

$$2^x=1+x\ln 2+\frac{x^2\ln^2 2}{2!}+\frac{x^3\ln^3 2}{3!}+\dots \qquad x\in(-\infty;\infty)$$

Это решение можно получить иначе: достаточно в разложении (19) заменить $x$ на $x\ln 2$, так как $2^x=e^{\ln 2^x}=e^{x\ln 2}$.

**95** Разложить в ряд по степеням $x$ функцию $f(x)=\dfrac{2}{3-x}$.

Решение

Воспользуемся формулой (26). Так как

$$f(x)=\frac{2}{3-x}=\frac{2}{3(1-\frac{x}{3})}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}},$$

то заменив $x$ на $\dfrac{x}{3}$ получим:

$$\frac{2}{3-x}=\frac{2}{3}\cdot\left(1+\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{x}{3}\right)^3+\dots\right),$$

или

$$\frac{2}{3-x}=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{3^2}+\dots+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^n}{3^n}+\dots,$$

где $-1<\dfrac{x}{3}<1$, то есть $-3<x<3$.

**96** Разложить в ряд по степеням $x$ функцию $f(x)=\cos^2 x$.

Решение

$f(x)=cos^2 x=\frac{1}{2}(1+cos\,2x)$, поэтому достаточно разложить в ряд функцию $cos\,2x$, заменив в формуле (21) $x$ на $2x$:

$$cos\,2x=1-\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}-\frac{2^6x^6}{6!}+\ldots,\qquad x\in(-\infty;\infty).$$

Это разложение справедливо, как и в случае $cos\,x$, для всех $x$.

В итоге получим:

$$cos^2 x=\frac{1}{2}\left(1+1-\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2-\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)=$$

$$=1-\frac{2x^2}{2!}+\frac{2^3x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

**97** Разложить в ряд по степеням $x$ функцию $f(x)=e^{-x}\sin x$.

Решение

Ряд для функции $e^{-x}$ получается из ряда для функции $e^x$ заменой $x$ на $-x$ и абсолютно сходится на всей числовой прямой. Ряд для функции $sin\,x$ также абсолютно сходится на всей числовой прямой. Поэтому, чтобы получить разложение функции $f(x)=e^{-x}\sin x$ в ряд, достаточно перемножить абсолютно сходящиеся ряды для функций $e^{-x}$ и $sin\,x$.

$$e^{-x}\sin x=\left(1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)\cdot\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)=x-x^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{40}x^5+\ldots$$

Полученный ряд, по свойству сходящихся рядов, сходится на всей числовой прямой к функции $f(x)=e^{-x}\sin x$.

### *Задания для самостоятельного решения*

**98** Разложить функцию ряд Тейлора $f(x)=\frac{1}{x}$ по степеням ($x$+2).

Разложить функцию ряд Тейлора, взяв три члена разложения

**99** $f(x)=sin\,x$ по степеням $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

**100** $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$ по степеням *x*.

**101** $f(x)=2x\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)-x$ по степеням *x*.

**102** $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$ по степеням *x*.

**103** $f(x)=\ln(1-x-6x^2)$ по степеням *x*.

**104** Разложить функцию $y=\ln x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x$=1 (при $x_0$=1).

**105** Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=(1+x)^4$.

**106** Разложить функцию $y=\sin\dfrac{x}{2}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x$ = 0

## 1.4. Некоторые приложения степенных рядов

### *Вычисление значений функций*

Пусть требуется вычислить значение функции $f(x)$ при $x=x_1$ с заданной точностью. Предположим, что эту функцию можно разложить в степенной ряд: $f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots$ на интервале $(-R;R)$ и $x_1\in(-R;R)$.

Тогда $f(x_1)=a_0+a_1(x_1-x_0)+\ldots+a_n(x_1-x_0)^n+\ldots$. Взяв достаточное число первых членов ряда, получим

$$f(x_1)=S_n(x_1)=a_0+a_1(x_1-x_0)+\ldots+a_n(x_1-x_0)^n$$

Абсолютная погрешность этого приближенного равенства, то есть $|f(x_1)-S_n(x_1)|$ равно модулю остатка ряда $\Delta=|f(x_1)-S_n(x_1)|=|r_n(x_1)|$, где $r_n(x_1)=a_{n+1}(x_1-x_0)^{n+1}+a_{n+2}(x_1-x_0)^{n+2}+\ldots$ Чтобы вычислить значение $f(x_1)$ с точностью $\varepsilon>0$, нужно взять сумму такого числа $n$ первых членов ряда, чтобы $|f(x_1)-S_n(x_1)|=|r_n(x_1)|\le\varepsilon$.

Оценить погрешность можно с помощью остаточного члена ряда Тейлора. Если функция $f(x)$ разложена в степенной ряд, то этот ряд является ее рядом Тейлора (или Маклорена). В этом случае

$$\left| f(x_1) - S_n(x_1) \right| = \left| R_n(x_1) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x_1 - x_0)^{n+1} \right|,$$

где $c = x_0 + \theta(x_1 - x_0),\ 0 < \theta < 1$.

В зависимости от конкретного случая применяется тот или иной метод оценки остатка ряда (или оценки погрешности).

### *Решение типовых примеров*

**107** Вычислить с точностью до 0,001 число $e$

Решение

Запишем ряд Маклорена для $e^x$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

При $x = 1$ получим

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots.$$

Запишем приближенное равенство

$$e^x \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

Оценим погрешность приближения с помощью остаточного члена ряда Маклорена.

Так как $f^{(n+1)}(x) = e^x$, то $R_n(x) = \dfrac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$, где $c = \theta x,\ 0 < \theta < 1$.

При $x = 1$ $R_n(1) = \dfrac{e^\theta}{(n+1)!},\ 0 < \theta < 1$.

Учитывая, что $e^\theta < e < 3$, получим $R_n(1) < \dfrac{3}{(n+1)!}$.

При $n = 5$ $\qquad \dfrac{3}{(5+1)!} = \dfrac{1}{240} > 0.001$.

При $n = 6$ $\qquad \dfrac{3}{7!} = \dfrac{1}{1680} < 0.001$.

Поэтому для достижения требуемой точности достаточно взять $n = 6$.

Итак,

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} =$$

$$= 1.0000 + 1.0000 + 0.5000 + 0.1667 + 0.0417 + 0.0083 + 0.0014 = 2.7181.$$

Следовательно, $e \approx 2.7181$ с точностью до 0,001.

**108** Вычислить $sin18^o$ с точностью до 0,0001.

Решение

$$sin18^o = sin\frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3!10^3} + \frac{\pi^5}{5!10^5} - \ldots.$$

Полученный ряд знакочередующийся, члены которого убывают по абсолютной величине. Поэтому его остаток не превосходит первого отброшенного члена ряда.

Так как $\frac{\pi^3}{3!10^3} > 0.0001$, а $\frac{\pi^5}{5!10^5} < 0.0001$, то с точностью до 0,0001 получим

$$sin18^o \approx \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3!10^3} = \frac{(3.14159)}{10} - \frac{(3.14159)^3}{3!10^3} = 0.314159 - 0.00517 = 0.30899.$$

Итак, $sin18^o \approx 0.3090$.

### *Вычисление определенных интегралов*

Сущность метода поясним на конкретном примере

**109** Вычислить $\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2} dx$ с точностью до 0,001.

Решение

Так как $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$, то положив $x = -x^2$, получим $e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots$ этот ряд сходится при $x \in (-\infty; +\infty)$ значит, его можно почленно интегрировать на любом отрезке и, в частности, на отрезке $\left[0; \frac{1}{3}\right]$:

$$\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{3}} (1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots) dx = x\Big|_0^{\frac{1}{3}} - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{1}{3}} + \frac{x^5}{5 \cdot 2}\Bigg|_0^{\frac{1}{3}} - \frac{x^7}{7 \cdot 6}\Bigg|_0^{\frac{1}{3}} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 2 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 3^7} + \ldots$$

Искомый интеграл представлен знакочередующимся рядом. Так как $\frac{1}{5 \cdot 2 \cdot 3^5} = \frac{1}{2430} < 0.001$, то с точностью до 0,001 имеем

$$\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} = 0.3333 - 0.0123 = 0.3210$$

Итак $\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2}dx \approx 0.321$.

### *Применение рядов к решению дифференциальных уравнений*

Пусть требуется найти решение уравнения

$$y'' = F(x, y, y'), \qquad (11)$$

удовлетворяющее начальным условиям при $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$.

Допустим, что решение $y = f(x)$ и его можно представить рядом

$$y = f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots.$$

Нужно найти $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, …, то есть значения производных от частного решения при $x = x_0$.

Из начального условия следует, что $f(x_0) = y_0$, $f'(x_0) = y'_0$. Из уравнения (27) получаем

$$y''_0 = f''(x_0) = F(x_0, y_0, y'_0).$$

Дифференцируя обе части уравнения (27) по $x$, получим

$$y''' = F'_x(x, y, y') + F'_y(x, y, y')y' + F'_{y'}(x, y, y')y''.$$

Подставляя в это равенство $x = x_0$, найдём

$$y'''_0 = f'''(x_0) = y'''(x_0).$$

Дифференцируя $y'''$ еще раз по $x$, найдем $f^{IV}(x_0) = y^{IV}(x_0)$ и т. д. Найденные значения производных подставим в ряд Тейлора решения $y = f(x)$. Для тех значений $x$, при которых этот ряд сходится, он представляет решение уравнения.

### *Решение типовых примеров*

**110** Найти первые три члена разложения в степенной ряд частного решения уравнения $y'' = y\cos x + x$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Решение

Ищем решение уравнения в виде ряда Маклорена (т. к. $x_0 = 0$)

$$y = y(0) + y'(0) + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots .$$

Учитывая, что при $x = 0$, $y = 1$ находим $y''(0) = 1\cos 0 + 0 = 1$.

Для нахождения $y'''$ дифференцируем обе части данного уравнения $y''' = y'\cos x - y\sin x + 1$.

При $x = 0$ получим $y'''(0) = y'(0)\cos 0 + y(0)\sin 0 + 1 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 = 1$

Подставляя значения $y(0)$, $y'(0), y''(0)$, $y'''(0)$ в ряд для частного решения $y(x)$, получим приближенное выражение частного решения в виде частичной суммы ряда $y(x) \approx 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$.

Если дифференциальное уравнение линейное, то удобнее искать частное решение в виде степенного ряда $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$ или $y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$.

Для нахождения коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_n$ решение в виде степенного ряда подставляют в уравнение и приравнивают коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях $x$ в левой и правой частях уравнения.

**111** $\begin{cases} y'' = 2xy' + 4y \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$

Решение

$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$

$y(0) = a_0 = 0$ $\qquad$ $y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$

$y'(0) = a_1 = 1$

Следовательно, $y = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$

$y' = 1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + na_n x^{n-1} + \dots$

$y'' = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + \dots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \dots$

Подставляем $y, y', y''$ в уравнение, получим

$2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + \dots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \dots =$

$= 2x(1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + na_n x^{n-1} + \dots) + 4(x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots),$

откуда

$2a_2 = 0$ $\qquad$ $a_2 = 0$

$3 \cdot 2a_3 = 2 + 4$ $\qquad$ $a_3 = 1$

$4\cdot 3a_4 = 4a_2 + 4a_2\ a_4 = 0$

$n(n-1)a_n = (n-2)\cdot 2a_{n-2} + 4a_{n-2}$ $\qquad a_n = \dfrac{2a_{n-2}}{n-1}$

Следовательно,

$a_4 = 0$; $\quad a_5 = \dfrac{2\cdot 1}{4} = \dfrac{1}{2!}$; $\quad a_6 = 0$; $\quad a_7 = \dfrac{2\cdot\frac{1}{2}}{6} = \dfrac{1}{3!}$; $\quad a_9 = \dfrac{1}{4!}$;

$a_{2k} = 0$; $\quad a_{2k+1} = \dfrac{2\cdot\frac{1}{(k-1)!}}{2k} = \dfrac{1}{k!}$.

Подставляя найденные значения коэффициентов и искомое частное решение, получим

$$y = x + \frac{x^3}{1!} + \frac{x^5}{2!} + \frac{x^7}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{n!} + \ldots$$

$$y = x\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots\right)$$

$$y = xe^{x^2}.$$

### *Задания для самостоятельного решения*

**112** Вычислить $\cos 10^0$ ограничившись двумя членами ряда, оценить погрешность.

**113** Вычислить:

а) $\sqrt[4]{90}$ с точностью до $10^{-4}$; б) $\sqrt[4]{630}$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$;

в) $\sin 9^0$ с точностью до $10^{-4}$; г) $\sqrt[5]{34}$ с точностью до $10^{-4}$.

**114** Вычислить $\ln 1{,}2$.

**115** Вычислить $e^{-0{,}2}$ с точностью $\varepsilon = 0{,}0001$.

**116** Ограничиваясь первыми тремя членами разложения вычислить

а) $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin x}{x}dx$; б) $\int\limits_0^{0{,}5} \dfrac{e^x - 1}{x}dx$; в) $\int\limits_0^{0{,}4} e^{-\frac{x^2}{4}}dx$.

**117** Вычислить:

а) $\int\limits_0^{0{,}1} \dfrac{\ln(1+x)}{x}dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$;

б) $\int\limits_0^{0{,}5} \dfrac{1-\cos x}{x^2}dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

**118** С помощью разложения в ряд по степеням $x$ проинтегрировать уравнения: $y' = x - 2y, \quad y(0) = 0.$

**119** Методом последовательного дифференцирования найти первых три члена (отличных от нуля) разложения в ряд решения уравнения

$$y'' = xy' - y + e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

**120** Найти решение уравнения $y'' + y'x + y = x\cos x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1,$ используя метод неопределённых коэффициентов.

## ОТВЕТЫ

**63** $x\in(10;+\infty)$. **64** $x\in(-\infty;0)$. **65** $x\in(-\infty;+\infty)$. **66** $x\in(-\infty;+\infty)$.

**67** $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **68** $x\in(0;+\infty)$. **69** $x\in\left(-\sqrt{e-1};\sqrt{e-1}\right)$.

**70** Всюду расходится. **71** $x\in(-2;2)$. **72** Сходится равномерно на всей числовой оси. **73** Сходится равномерно на всей числовой оси.

**74** Сходится равномерно на всей числовой оси. **75** Сходится равномерно на всей числовой оси. **76** Сходится равномерно на $[-2;2]$. **77** Сходится равномерно на $[-2;2]$.

**81** $x\in(-1;1)$. **82** $x\in(-3;3)$. **83** $x\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. **84** $x=0$.

**85** $x\in(-1;1]$. **86** $x\in\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. **87** $x\in(-\infty;+\infty)$. **88** $x\in[-10;10)$

**89** $x\in(-4;0]$. **90** $x\in(-\infty;+\infty)$. **91** $x\in[-5;3)$. **92** $x\in[3;5)$.

**93** $x\in(-1;3)$. **98** $-\frac{1}{2}\left(1+\frac{x+2}{2}+\frac{(x+2)^2}{2^2}+\frac{(x+2)^3}{2^3}+\ldots+\frac{(x+2)^n}{2^n}+\ldots\right)$.

**99** $1-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4-\ldots$. **100** $\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{16}x^3+\frac{75}{256}x^4+\ldots$.

**101** $x-\frac{x^3}{2!}+\frac{x^5}{4!}-\frac{x^7}{6!}+\ldots$. **102** $\left(1-\frac{3}{2}\right)+\left(1-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2^2}\right)+\ldots$ .

**103** $-x-\frac{13}{2}x^2-\frac{19}{3}x^3-\ldots$.

**104** $(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}+\cdots$.

**105** $1+4x+6x^2+4x^3+x^4$.

**112** $0{,}9848$. **113** а) $3{,}0801$, б)5,01, в)0,1564, г) 2,0244. **114** $0{,}1823$.

**115** $0{,}8186$. **116** а) $0{,}948$; б) $0{,}569$; в) 0,3897. **117** а) 0,098, б) 0,2483.

**118** $y(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots$. **119** $y(x)=1+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x^4+\ldots$ .

**120** $y(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов, т. 2: Учебное пособие для вузов.-13-е изд.-М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985.-560 с.
2. Ефимов А.В., Поспелов А. С., Шостак Р. Я. и др. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч. 2: Учебное пособие для втузов / Под общ. ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. — 4-е изд. перераб. и доп. —М.: Издательство Физико-математической литературы, 2001.— 432с.
3. Конспект лекций по высшей математике: полный курс /Д. Т. Письменный. - 10-е изд., испр. - М.: Айрис-пресс, 2011. - 608 с.: ил. - (Высшее образование).
4. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: учебник. - 6-е изд., испр. - М.: Издательство "Дело" АНХ, 2008. - 720 с.
5. Высшая математика для экономистов: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / [Н.Ш. Кремер и др.]; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. - 3-е изд. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010. - 479 с.
6. Малугин В.А. Математика для экономистов: Математический анализ. Курс лекций. – М.: Эксмо. 2005. – 272 с.