Тема 6. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

ПЗ №6. Числовые ряды

1. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

1.1. Числовые ряды

Решение типовых примеров

1 Дан общий член ряда $u_n = \dfrac{2n-1}{3^n}$. Написать первые четыре члена ряда.

Решение

Если $n=1$, то $u_1 = \dfrac{1}{3}$; если $n=2$, то $u_2 = \dfrac{3}{9}$; если $n=3$, то $u_3 = \dfrac{5}{27}$; если $n=4$, то $u_4 = \dfrac{7}{81}$;…. Ряд можно записать в виде $\dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{9} + \dfrac{5}{27} + \dfrac{7}{81} + \ldots$.

2 Найти общий член ряда $\dfrac{4}{2} + \dfrac{16}{4} + \dfrac{64}{6} + \dfrac{256}{8} + \ldots$.

Решение

Числители образуют геометрическую прогрессию $4, 4^2, 4^3, 4^4, \ldots$; n-й член этой прогрессии $b_n = 4^n$. Знаменатели образуют арифметическую прогрессию $2, 4, 6, 8, \ldots$; n-й член этой прогрессии находим по формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$, где $a_1 = 2$, $d = 2$, поэтому $a_n = 2n$. Следовательно, общий член этого ряда $u_n = \dfrac{4^n}{2n}$.

3 Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 + 5n + 6}$.

Решение

Представим общий член ряда в виде суммы простейших дробей:

$$u_n = \frac{1}{n^2 + 5n + 6} = \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{A}{n+2} + \frac{B}{n+3}$$

Умножая обе части этого выражения на знаменатель, придём к тождеству

$$1 \equiv A(n+3) + B(n+2).$$

Полагая $n = -2$, находим 1 = A; значит $A = 1$;

$n = -3$, находим 1 = - B; значит $B = -1$.

Таким образом, $u_n = \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+3}$, т.е. $u_n = \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+3}$.

Отсюда $u_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$; $u_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$; $u_3 = \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$; $u_4 = \frac{1}{6} - \frac{1}{7}$;….

Следовательно,

$$S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + ... + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}.$$

Так как $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}) = \frac{1}{3}$, то ряд сходится.

4 Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 4}$.

Решение

Сравним этот ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$(то есть с бесконечно убывающей геометрической прогрессией, так как $q = \frac{1}{3} < 1$), этот ряд сходится.

Члены данного ряда меньше соответствующих членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, следовательно, данный ряд сходится.

5 Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4 \cdot 2^n - 3}$.

Решение

Сравним этот ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ ($q = \frac{1}{2} < 1$,бесконечно убывающая геометрическая прогрессия). Применим предельный признак сравнения рядов:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{4 \cdot 2^n - 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4 - \frac{3}{2^n}} = \frac{1}{4}.$$

Так как предел конечен и отличен от нуля и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится, то сходится и данный ряд.

6 Исследовать сходимость ряда $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + ... + \frac{1}{3n-1} + ...$

Решение

Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$(расходится).

Воспользуемся предельным признаком сравнения $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}=\frac{1}{3}$.

Следовательно, данный ряд расходится.

7 Исследовать сходимость ряда $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2^{10}}+\frac{2^3}{3^{10}}+\frac{2^4}{4^{10}}+...+\frac{2^n}{n^{10}}+....$

Решение

Применим признак Даламбера: имеем $u_n=\frac{2^n}{n^{10}}$, $u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)^{10}}$.

Тогда $l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot n^{10}}{(n+1)^{10}\cdot 2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot n^{10}}{(n+1)^{10}}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{10}}=2$.

Так как $l>1$, то данный ряд расходится.

8 Исследовать сходимость ряда

$$\frac{10}{1!}+\frac{10^2}{3!}+\frac{10^3}{5!}+\frac{10^4}{7!}+...+\frac{10^n}{(2n-1)!}+....$$

Решение

Применим признак Даламбера: имеем $u_n=\frac{10^n}{(2n-1)!}$,

$$u_{n+1}=\frac{10^{n+1}}{\left(2(n+1)-1\right)!}=\frac{10^{n+1}}{(2n+2-1)!}=\frac{10^{n+1}}{(2n+1)!}.$$

Тогда $l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{10^{n+1}(2n-1)!}{(2n+1)!10^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{10}{2n(2n+1)}=0$.

Так как $l<1$, то данный ряд сходится.

9 Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

Решение

Здесь удобнее применить радикальный признак Коши, поскольку $\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{3},$$ так как $l<1$, то данный ряд сходится.

10 Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$.

Решение

Воспользуемся интегральным признаком Коши:

$$u_n=\frac{n}{n^2+1},\qquad f(x)=\frac{x}{x^2+1},\quad \int_1^{\infty}\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|_1^{\infty}=\infty.$$

Интеграл расходится, поэтому расходится и данный ряд.

Задания для самостоятельного решения

11 Записать 4-5 первых членов ряда, по известному общему члену U_n.

а) $U_n=\frac{3n-2}{n^2+1}$;

б) $U_n=\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$;

в) $U_n=\frac{n^3}{e^n}$;

г) $U_n=\frac{1}{(2n-1)3^{n-1}}$;

д) $U_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

е) $U_n=\frac{n^2}{n!}$.

12 Написать простейшую формулу *n–го* члена ряда по указанным членам

а) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$;

б) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots$;

в) $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\ldots$;

г) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}+\ldots$;

д) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots$;

е) $\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\frac{5}{16}+\frac{6}{25}+\ldots$;

ж) $\frac{2}{5}+\frac{4}{8}+\frac{6}{11}+\frac{8}{14}+\ldots$;

з) $\frac{1}{2+3}+\frac{1}{4+3}+\frac{1}{8+3}+\frac{1}{16+3}+\ldots$;

и) $1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\ldots$.

13 Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости рядов

а) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{6}{7}+...+\frac{2n}{2n+1}+...$

б) $1+\frac{3}{4}+\frac{5}{9}+...+\frac{2n-1}{n^2}+...$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n}$

г) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+...+\frac{2n-1}{2n}+...$

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3}$

е) $\sum_{n=1}^{\infty}arctg\frac{1}{n}$

ж) $2+\frac{5}{8}+\frac{10}{27}+...+\frac{n^2+1}{n^3}+...$

з) $\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$

14 Найти сумму n – первых членов ряда (S_n), доказать сходимость ряда, пользуясь непосредственно определением сходимости и найти сумму ряда S

а) $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+...;$

б) $\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+...+\frac{3^n+2^n}{6^n}+...;$

в) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+...;$

г) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+....$

15 Исследовать на сходимость по признаку сравнения

а) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 9}+\frac{1}{3\cdot 27}+...+\frac{1}{n\cdot 3^n}+...;$

б) $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}+...+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+...;$

в) $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+...;$

г) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}+...;$

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n-1}{9^n+3}.$

16 Исследовать на сходимость, используя признак Даламбера

а) $1+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5^2}+\frac{1}{4\cdot 5^3}+\ldots;$ б) $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+\ldots;$

в) $1+\frac{2}{2!}+\frac{4}{3!}+\frac{8}{4!}+\ldots;$ г) $1+\frac{3}{2\cdot 3}+\frac{3^2}{2^2\cdot 5}+\frac{3^3}{2^3\cdot 7}+\ldots.$

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{5^n\cdot n}$

17 Исследовать на сходимость, используя радикальный признак Коши

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n};$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n;$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^n\frac{\pi}{2n};$

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+1}{2n^2-1}\right)^n.$

18 Исследовать на сходимость, используя интегральный признак Коши

а) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots.+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots;$ б) $1+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{10}}+\ldots;$

в) $1+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{5}}+\ldots;$ г) $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}+\ldots;$

д) $\frac{1}{2\ln^2 2}+\frac{1}{3\ln^2 3}+\frac{1}{4\ln^2 4}+\ldots.$

Исследовать сходимость рядов:

19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{5^n+2};$ **20** $\frac{1}{8}+\frac{1}{7^2+1}+\frac{1}{7^3+1}+\frac{1}{7^4+1}+\ldots;$

21 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\sqrt{n^2+n}};$ **22** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+2}};$

23 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10}{11}\right)^n\cdot n^5;$ **24** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{6^n};$

25 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n(2n-1)};$ **26** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!};$

27 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$;

28 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)!}{10^n n^2}$;

29 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+2n+1}{3n^2+2n+1}\right)^n$;

30 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$;

31 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arcsin\frac{1}{2^n}\right)^{3n}$;

32 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arcsin\frac{n+3}{2n+5}\right)^n$;

33 $\frac{1}{8}+\frac{1}{18}+\frac{1}{28}+...+\frac{1}{10n-2}+...$;

34 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)ln^2(3n+1)}$;

35 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+3}$;

36 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)^2}$.

1.2. Знакочередующиеся ряды

Решение типовых примеров

37 Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+...+\left(-1\right)^{n+1}\frac{1}{\left(n+1\right)^2}+....$$

Вычислить приближенно его сумму, удержав три первых члена ряда, и оценить погрешность.

Решение

Проверим выполнимость условий признака Лейбница, т.к. $u_n=\frac{1}{(n+1)^2}$,

$$1)\frac{1}{4}>\frac{1}{9}>\frac{1}{16}>...$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=0.$$

Оба условия выполняются. Следовательно, данный ряд сходится

$$S\approx S_3=\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{16}=0{,}2014\,.$$

Ошибка δ, получающаяся при замене суммы этого ряда суммой трёх первых членов, меньше абсолютной величины четвертого члена, то есть

$\delta<\left|u_4\right|,\qquad \delta<\frac{1}{25}$=0,04.

Ответ: $S = 0.2014 \qquad \delta < 0.04$.

38 Вычислить сумму ряда с точностью до 0,01: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n^2}$.

Решение

Данный ряд сходится, так как $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n^2} = 0$,

Так как $|r_n| < u_{n+1} < 0,01$, то найдём n

$$\left|\frac{1}{3(n+1)^2}\right| < 0.01, \qquad 3(n+1)^2 > 100,$$

$$\sqrt{3}(n+1) > 10, \qquad n+1 > \frac{10}{\sqrt{3}},$$

$$n > 5,7 - 1, \qquad n > 4,7.$$

Следовательно, $n = 5$.

Значит, это неравенство выполняется, начиная, с $n = 5$.

Таким образом,

$$S \approx S_5 = \frac{1}{3\cdot 1^2} - \frac{1}{3\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 3^2} - \frac{1}{3\cdot 4^2} + \frac{1}{3\cdot 5^2} =$$
$$= 0,333 - 0,083 + 0,037 - 0,021 + 0,013 = 0,279.$$

Ответ: $S = 0,28$.

Задания для самостоятельного решения

39 а) Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

суммой четырех первых его членов. Найти эту сумму.

б) Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда

$$0,1 - \frac{0,1^2}{2} + \frac{0,1^3}{3} - \frac{0,1^4}{4} + \ldots$$

суммой трех первых его членов. Найти эту сумму.

Вычислить сумму ряда с точностью до ε

40 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)^3}, \quad \varepsilon = 0,001;$

41 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}, \quad \varepsilon = 0,01;$

42 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{3^n}, \quad \varepsilon=0{,}1;$

43 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n, \quad \varepsilon=0{,}1;$

44 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^3+1}, \quad \varepsilon=0{,}01;$

45 $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots \qquad \varepsilon=0{,}01.$

1.3. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость

Решение типовых примеров

Исследовать сходимость знакопеременных рядов и установить характер сходимости (абсолютная, условная)

46 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^5}}$

Решение

Ряд знакочередующийся, поэтому применим признак Лейбница.

1) $1>\frac{1}{\sqrt[4]{2^5}}>\frac{1}{\sqrt[4]{3^5}}>\frac{1}{\sqrt[4]{4^5}}>\ldots$ первое условие признака выполнено,

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}=0$ второе условие признака выполнено, значит, ряд сходится.

Составим ряд из абсолютных величин данного ряда:

$$1+\frac{1}{\sqrt[4]{2^5}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3^5}}+\frac{1}{\sqrt[4]{4^5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}+\ldots.$$

Этот ряд обобщённо гармонический и при $p=\frac{5}{4}>1$ является сходящимся.

Значит, данный ряд сходится абсолютно.

47 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{10n+1}.$

Решение

Применим признак Лейбница.

1) $\frac{1}{11} > \frac{1}{21} > \frac{1}{31} > \frac{1}{41} > \ldots$первое условие признака выполнено,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{10n+1} = 0$ второе условие признака выполнено, значит, ряд сходится.

Составим ряд из абсолютных величин данного ряда:

$$\frac{1}{11} + \frac{1}{21} + \frac{1}{31} + \frac{1}{41} + \ldots + \frac{1}{10n+1} + \ldots.$$

Исследуем этот ряд с помощью интегрального признака Коши:

$$f(x) = \frac{1}{10x+1},$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{10x+1} = \frac{1}{10}\int_1^\infty \frac{d(10x+1)}{10x+1} = \frac{1}{10} ln(10x+1)\Big|_1^\infty = \infty.$$

Интеграл расходится, поэтому и ряд расходится.

Значит, данный ряд сходится условно.

48 $1{,}1 - 1{,}01 + 1{,}001 - \ldots + (-1)^{n-1}\left[1 + (0{,}1)^n\right] + \ldots.$

Решение

Применим признак Лейбница.

1) $1{,}1 > 1{,}01 > 1{,}001 > \ldots$первое условие признака выполнено,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{10^n}) = 1$ второе условие признака не выполняется. Значит, ряд расходится.

Задания для самостоятельного решения

Выяснить, какие ряды сходятся абсолютно, какие сходятся условно, какие расходятся

49 $-\frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} - \frac{7}{2^3} + \ldots + (-1)^n \frac{2n+1}{2^n} + \ldots;$

50 $-\frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{10^2} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{(3n+1)^2} + \ldots;$

51 $-\frac{1}{ln2} + \frac{1}{ln3} - \frac{1}{ln4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{ln(n+1)} + \ldots;$

52 $-1 + \frac{2^2}{2!} - \frac{3^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{n^n}{n!} + \ldots;$

53 $1-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{7}}+...+\left(-1\right)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}+...;$

54 $\frac{1}{1!}-\frac{2^2}{2!}+\frac{3^2}{3!}-\frac{4^2}{4!}+...+\left(-1\right)^{n+1}\frac{n^2}{n!}+...;$

55 $\frac{1}{2\ln 2}-\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}+...+\left(-1\right)^{n+1}\frac{1}{\left(n+1\right)\ln\left(n+1\right)}+...;$

56 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \ln n}{n};$

57 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)^2}{n^2+1};$

58 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n;$

59 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n;$

60 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 5^n}.$

ОТВЕТЫ

11 а) $\frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{7}{10}+\frac{10}{17}+...$; б) $\frac{3}{2^2\cdot 3^2}+\frac{5}{3^2\cdot 4^2}+\frac{7}{4^2\cdot 5^2}+\frac{9}{5^2\cdot 6^2}+...$;

в) $\frac{1}{e}+\frac{8}{e^2}+\frac{27}{e^3}+\frac{64}{e^4}+...$; г) $1+\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{7\cdot 27}+...$;

д) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+...$; е) $1+\frac{4}{2}+\frac{9}{6}+\frac{16}{24}+\frac{25}{120}+...$.

12 а) $U_n=\frac{1}{2n-1}$; б) $U_n=\frac{1}{2n}$; в) $U_n=\frac{n}{2^{n-1}}$; г) $U_n=\frac{1}{n(n+1)}$; д) $U_n=\frac{1}{n^2}$;

е) $U_n=\frac{n+2}{(n+1)^2}$; ж) $U_n=\frac{2n}{3n+2}$; з) $U_n=\frac{1}{2^n+3}$; и) $U_n=\frac{1}{n!}$;

13 а) $\{1\}$ - нет; б) $\{0\}$ - да; в) $\{1\}$ - нет; г) $\{1\}$-нет; д) $\{0\}$ - да;

е) $\{0\}$ - да; ж) $\{0\}$ - да; з) $\{1\}$ - нет.

14 а) $S=\frac{1}{2}$, сходится; б) $S=\frac{3}{2}$, сходится; в) $S=1$, сходится;

г) $S=\frac{1}{2}$, сходится.

15 а) сходится; б) расходится; в) расходится; г) расходится; д) сходится.

16 а) сходится; б) сходится; в) сходится; г) расходится; д) расходится.

17 а) сходится; б) сходится; в) сходится; г) сходится; д) расходится.

18 а) расходится; б)расходится; в) сходится; г) расходится; д) сходится.

19 Сходится. **20** Сходится. **21** Расходится. **22** Расходится.

23 Сходится. **24** Сходится. **25** Расходится. **26** Сходится.

27 Сходится. **28** Расходится. **29** Сходится. **30** Расходится.

31 Сходится. **32** Сходится. **33** Расходится. **34** Сходится.

35 Расходится. **36** Сходится.

39 а) $r_n<0{,}2,\quad S=0{,}58$; б) $r_n<0{,}000025,\quad S=0{,}0953$.

40 $n=4,\quad S=0{,}112$; **41** $n=4,\quad S=0{,}62$; **42** $n=6,\quad S=0{,}1$.

43 $n=6,\quad S=0{,}5$; **44** $n=4,\quad S=0{,}41$; **45** $n=5,\quad S=0{,}92$.

49 сходится абсолютно. **50** сходится абсолютно. **51** сходится условно.

52 расходится. **53** сходится условно. **54** сходится абсолютно.

55 сходится условно. **56** сходится условно. **57** расходится.

58 расходится. **59** сходится абсолютно. **60** сходится абсолютно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов, т. 2: Учебное пособие для вузов.-13-е изд.-М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985.-560 с.
2. Ефимов А.В., Поспелов А. С., Шостак Р. Я. и др. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч. 2: Учебное пособие для втузов / Под общ. ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. — 4-е изд. перераб. и доп. —М.: Издательство Физико-математической литературы, 2001.— 432с.
3. Конспект лекций по высшей математике: полный курс /Д. Т. Письменный. - 10-е изд., испр. - М.: Айрис-пресс, 2011. - 608 с.: ил. - (Высшее образование).
4. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: учебник. - 6-е изд., испр. - М.: Издательство "Дело" АНХ, 2008. - 720 с.
5. Высшая математика для экономистов: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / [Н.Ш. Кремер и др.]; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. - 3-е изд. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010. - 479 с.
6. Малугин В.А. Математика для экономистов: Математический анализ. Курс лекций. – М.: Эксмо. 2005. – 272 с.