Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Пример 1. Решить систему двух линейных уравнений и дать геометрическую иллюстрацию решения.

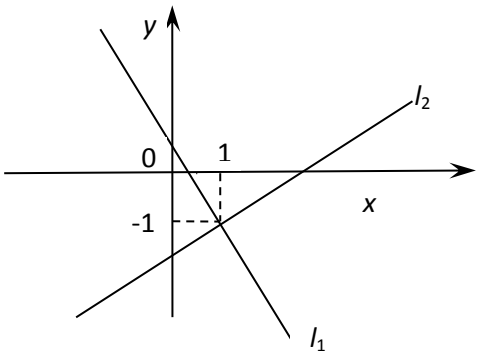
а) $\begin{cases} 3x+2y=1, \\ x-3y=4. \end{cases}$

Решение. Умножив второе уравнение на (–3) и сложив с первым, получим:

$11y=-11,$ откуда $y=-1.$

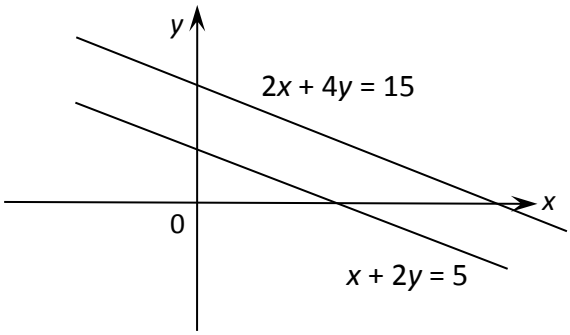
Из второго уравнения найдем *x*: $x=4+3y;\ x=4-3=1.$

Прямая l_1 отвечает первому уравнению системы, прямая l_2 – второму, а точка их пересечения M_0 (1; –1) – найденному решению.



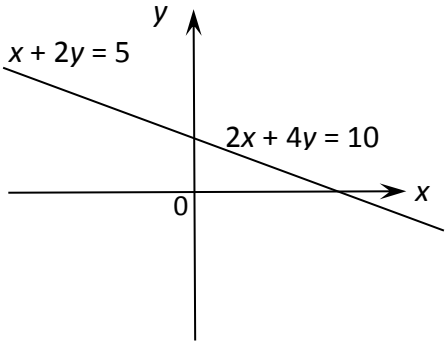
б) $\begin{cases} x+2y=5, \\ 2x+4y=15. \end{cases}$

Решение. Умножив первое уравнение на –2 и сложив со вторым, получим: $0=5$, откуда заключаем, что система решений не имеет. Построив прямые $x+2y=5$ и $2x+4y=15$, видим, что они параллельны и не имеют общих точек.



в) $\begin{cases} x+2y=5, \\ 2x+4y=10. \end{cases}$

Второе уравнение является следствием первого (получено умножением первого уравнения на 2). Графически – прямые, изображающие первое и второе уравнения, сливаются друг с другом.



Пример 2. Методом Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 18. \end{cases}$$

Решение. Выполним элементарные преобразования расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 17 \end{array}\right).$$

Запишем полученную систему треугольного вида:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_2 - 8x_3 = 0, \\ 17x_3 = 17. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 4, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Ответ: (3, 4, 1).

Пример 3. Решить систему методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

Решение. Приведем систему к треугольному виду. Для этого в первом уравнении оставим все переменные, а в каждом последующем уравнении получим на одну переменную меньше, чем в предыдущем уравнении. Исключим из второго и четвертого уравнений переменную x_1, умножив первое уравнение системы на числа (–2) и (–1) и сложив с этими уравнениями соответственно.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ -2x_2 + 3x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Исключим из третьего и четвертого уравнений переменную x_2, сложив их со вторым уравнением:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ \quad -2x_2 + 3x_3 - x_4 = -1, \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0. \end{cases}$$

Отбросив два последних уравнения, получим неопределенную систему из двух уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ \quad -2x_2 + 3x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$$

Пусть x_2 и x_3 – свободные неизвестные, а x_1 и x_4 – базисные неизвестные.

Тогда

$$\begin{cases} x_1 = 4 - 3{,}5x_2 + 5x_3, \\ x_4 = 1 - 2x_2 + 3x_3, \end{cases}$$

где $x_2,\ x_3 \in R$.

Ответ: $\left(4 - 3{,}5x_2 + 5x_3;\ x_2;\ x_3;\ 1 - 2x_2 + 3x_3\right),\ x_2,\ x_3 \in R$.

Пример 4. Решить систему методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$

Решение. Выполним элементарные преобразования расширенной матрицы

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 3 & & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 3 & & 2 \\ 3 & 5 & -2 & 3 & & 1 \\ 2 & 8 & -3 & 9 & & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -6 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right).$$

Получили выражение $0 = -4$, которое не имеет смысла. Следовательно, система несовместна, решений не имеет.

Ответ: решений нет.