Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Пример 1. Решить систему уравнений по формулам Крамера: $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$

Решение. Составим и вычислим главный определитель системы Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 70.$$

Главный определитель отличен от нуля, следовательно, система совместна и имеет единственное решение. Составим и вычислим вспомогательные определители $\Delta_{x_k} \quad (k = 1,\ 2,\ 3)$:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & -3 \\ 11 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 140;\ \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \\ 3 & 11 & 1 \end{vmatrix} = 140;\ \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 11 \end{vmatrix} = 70.$$

Воспользовавшись формулами Крамера, получим единственное решение:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{140}{70} = 2, \qquad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{140}{70} = 2,\ x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{70}{70} = 1.$$

Ответ: $(2,\ 2,\ 1)$.

Пример 2. Решить систему уравнений методом Крамера: $\begin{cases} 2x + 4y + 6z = 2, \\ 4x + 2y - 2z = 5, \\ 3x + 3y + 2z = 1. \end{cases}$

Решение. Главный определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$, но определитель

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 50 \neq 0$, а это означает несовместность системы.

Ответ: система несовместна, решений не имеет.

Пример 3. Решить систему уравнений методом Крамера: $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 5, \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$

Решение. Найдем главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 5 & -8 & 2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Вычислим вспомогательные определители:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -4 \\ 8 & -8 & 2 \end{vmatrix} = 0, \ \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 0, \ \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 5 & -8 & 8 \end{vmatrix} = 0 .$$

Так как все определители равны нулю, то система совместна и имеет множество решений.

Чтобы найти решение системы, определим ранг расширенной матрицы B системы:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 5 & -8 & 2 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \end{array}\right), \text{ отсюда } r(B) = 2 .$$

По аналогии основная матрица A системы примет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 5 & -8 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -8 \\ 0 & 7 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -8 \end{pmatrix}, \text{ отсюда } r(A) = 2 .$$

Тогда $r = r(A) = r(B) = 2$.

Так как уравнений системы $n = 3$, а ранг системы $r = 2$, то выберем $n - r = 3 - 2 = 1$ свободную переменную, а две другие – базисные переменные, которые выразим через свободную переменную.

Запишем данную систему уравнений как систему двух уравнений с двумя неизвестными. Для этого отбросим одно любое уравнение системы. За свободную переменную выберем любую неизвестную, например, x_3. В оставшихся двух уравнениях перенесем слагаемые, содержащие x_3, в правую часть. Решим полученную систему методом Крамера.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 5, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 1 - 2x_3, \\ 2x_1 + x_2 = 5 + 4x_3. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 - 2x_3 & -3 \\ 5 + 4x_3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2x_3 + 3(5 + 4x_3) = 16 + 10x_3,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1-2x_3 \\ 2 & 5+4x_3 \end{vmatrix} = 5+4x_3-2(1-2x_3) = 3+8x_3.$$

По формулам Крамера $x_1 = \dfrac{16+10x_3}{7}$, $x_2 = \dfrac{3+8x_3}{7}$.

Ответ: $\left(\dfrac{16+10x_3}{7};\ \dfrac{3+8x_3}{7};\ x_3\right)$, где $x_3 \in R$.