Вычисление площадей плоских фигур

Если непрерывная кривая задана в прямоугольных координатах уравнением $y = f(x)$ $\left(f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a,b]\right)$, то площадь плоской фигуры, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox (рис. 10.2), вычисляется по формуле $S = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, причем $S \geq 0$.

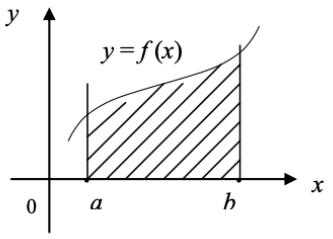

Рис. 10.2

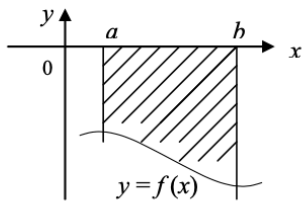

Рис. 10.3

Если $f(x) \leq 0,\ \forall x \in [a,b]$ (рис. 10.3), то в этом случае

$$S = \left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| = -\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $y = c$, $y = d$, непрерывной кривой $x = g(y)$ $\left(g(y) \geq 0,\ \forall y \in [c,d]\right)$ и осью Oy (рис. 10.4), вычисляется по формуле $S = \int\limits_c^d g(y)\,dy$.

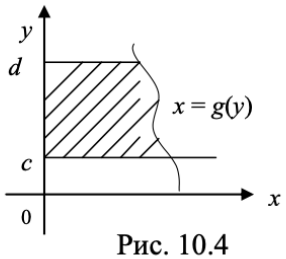

Рис. 10.4

Если криволинейная трапеция ограничена кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ $\left(f_1(x) \leq f_2(x),\ \forall x \in [a,b]\right)$ (рис. 10.5), то ее площадь равна

$$S = \int\limits_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx.$$

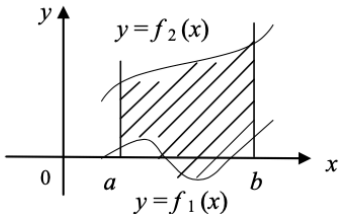

Рис. 10.5

Если криволинейная трапеция ограничена прямыми $y=c,\ y=d$ и кривыми $x=g_1(y),\ x=g_2(y)$ $\left(g_1(y)\le g_2(y),\ \forall y\in[c,d]\right)$ (рис. 10.6), то ее площадь вычисляется по формуле $S=\int\limits_c^d\left(g_2(y)-g_1(y)\right)dy.$

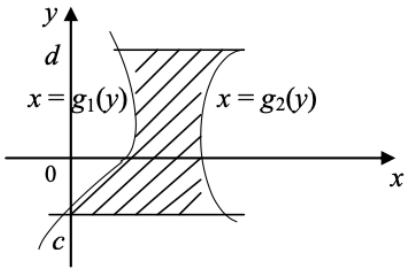

Рис. 10.6

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=a,\ x=b,$ осью Ox и кривой, заданной параметрическими уравнениями $x=x(t),\ y=y(t),\ t\in[t_1,\ t_2],$ находится по формуле

$$S=\int\limits_{t_1}^{t_2}y(t)\,x'(t)\,dt$$

при условии, что $x=x(t)$ строго возрастает на $[t_1,\ t_2]$. Если же $x=x(t)-$строго убывающая на $[t_1,\ t_2]$ функция, то $S=-\int\limits_{t_1}^{t_2}y(t)\,x'(t)\,dt.$

Пример 10.31. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x,\ y=0\ \left(0\le x\le\pi/4\right)$ (рис. 10.7).

Р е ш е н и е. Данная фигура является криволинейной трапецией, прилегающей к оси Ox, поэтому ее площадь

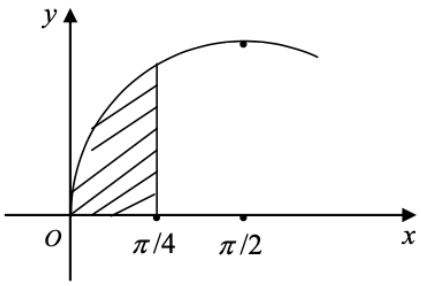

Рис. 10.7

$$S=\int\limits_0^{\pi/4}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi/4}=$$

$$=-\sin\frac{\pi}{4}+1=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\,(\text{кв.ед.}).$$

Пример 10.32. Найти площадь фигуры, ограниченной окружностью $x^2+y^2=1$, касательной к ней в точке $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и осью Ox (рис. 10.8).

Р е ш е н и е. Уравнение касательной имеет вид $y-y_0=k(x-x_0)$, где угловой коэффициент $k=y'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\Bigg|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}=-1$. Следовательно,

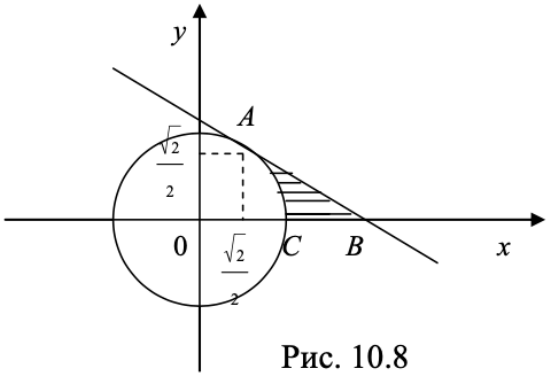

Рис. 10.8

$$y-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Rightarrow y=-x+\sqrt{2}-$$

искомое уравнение касательной. Касательная пересекает ось Ox в точке $B(\sqrt{2};0)$. Найдем площадь заштрихованной фигуры ABC:

$$S=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}}\left(-x+\sqrt{2}\right)dx-\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\left(-\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2}x\right)\Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}}-\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=$$

$$=\left[x=\sin t,\ dx=\cos t\,dt,\ \text{если } x=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \text{то } t=\frac{\pi}{4};\ \text{если } x=1,\ \text{то } t=\frac{\pi}{2}\right]=-1+2+$$

$$+\frac{1}{4}-1-\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}t\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\sin 2t\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4-\pi}{8}\,(\text{кв.ед.}).$$

Пример 10.33. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=2x-x^2$, $y=x-2$ (рис. 10.9).

Р е ш е н и е.

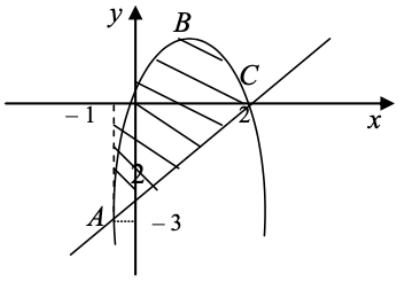

Рис. 10.9

Найдем точки пересечения данных кривых. Для этого решим систему уравнений: $\begin{cases} y = 2x - x^2, \\ y = x - 2, \end{cases}$ $2x - x^2 = x - 2, \quad x^2 - x - 2 = 0, \quad x_1 = -1, \; y_1 = -3,$ $x_2 = 2, \; y_2 = 0.$ Следовательно, кривые пересекаются в точках A (–1; –3) и C (2; 0). Таким образом, искомая площадь фигуры ABC

$$S = \int_{-1}^{2} \left(2x - x^2 - x + 2\right) dx = \int_{-1}^{2} \left(-x^2 + x + 2\right) dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{9}{2} \text{ (кв.ед.)}.$$

Пример 10.34. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 3x + 4, \; x - y - 2 = 0$ (рис. 10.10).

Р е ш е н и е.

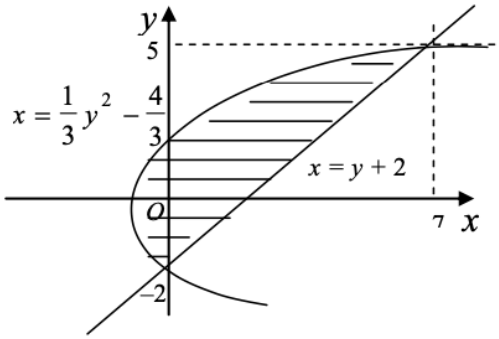

Рис. 10.10

Найдем точки пересечения кривых: $\begin{cases} y^2 = 3x + 4, \\ x = y + 2, \end{cases}$

$y^2 = 3(y + 2) + 4, \quad y^2 - 3y - 10 = 0, \quad y_1 = -2, \; y_2 = 5.$

Находим площадь фигуры:

$$S = \int_{-2}^{5} \left(y + 2 - \frac{1}{3}y^2 - \frac{4}{3}\right) dy = \int_{-2}^{5} \left(-\frac{1}{3}y^2 + y + \frac{10}{3}\right) dy = \left(-\frac{1}{9}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{10}{3}y\right)\Bigg|_{-2}^{5} = \frac{343}{18}.$$

Пример 10.35. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cos^3 t, \; y = a\sin^3 t$ (рис. 10.11).

Р е ш е н и е. Вычислим площадь S_1 ее части, ограниченной дугой AB, и результат увеличим в 4 раза.

Если $x = 0$, то $t = \frac{\pi}{2}$; если $x = a$, то $t = 0$.

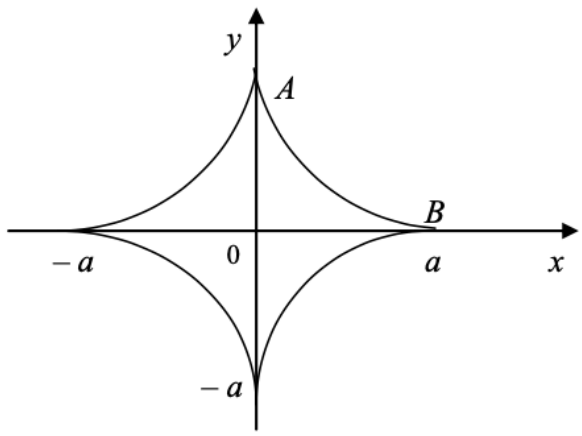

Рис. 10.11

$$S_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)\,dt = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cdot \cos^2 t\,dt =$$

$$= 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt = \frac{3}{8}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^3 2t - \cos^2 2t - \cos 2t + 1\right)dt =$$

$$= \frac{3}{16}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 2t\right)d(\sin 2t) - \frac{3}{8}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 4t}{2}dt - \frac{3}{16}a^2\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{8}a^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{3}{16}a^2\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{16}a^2\sin^3 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{16}a^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{64}a^2\sin 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3\pi a^2}{16} =$$

$$= -\frac{3a^2\pi}{32} + \frac{3\pi a^2}{16} = \frac{3\pi a^2}{32}.$$

Искомая площадь $S = 4S_1 = \dfrac{3\pi a^2}{8}$ (кв.ед).

Вычисление объема тела вращения

Объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$, вокруг оси Ox (рис. 10.12), находится по формуле

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

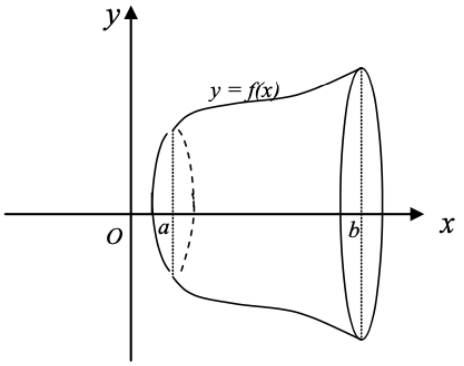

Рис. 10.12

Если вокруг оси Ox вращается фигура, ограниченная кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $\left(0 \le f_1(x) \le f_2(x),\ x \in [a,b]\right)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V = \pi\int_a^b \left(f_2^2(x) - f_1^2(x)\right)dx.$$

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x = g(y)$, осью Oy и прямыми $y = c$, $y = d$ (рис. 10.13), определяется по формуле

$$V = \pi\int_c^d x^2 dy = \pi\int_c^d g^2(y)\,dy.$$

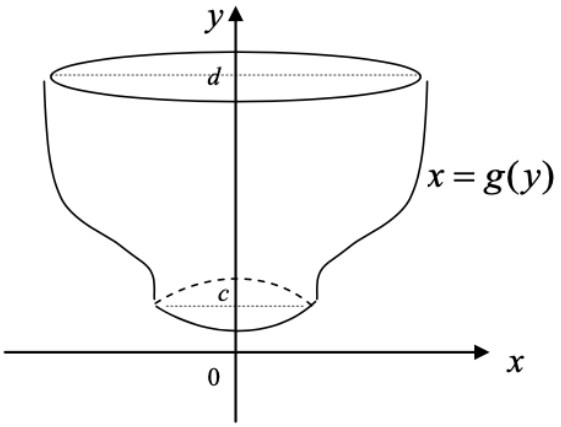

Рис. 10.13

Если фигура ограничена кривыми $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$ $\left(0 \le g_1(y) \le g_2(y),\ y \in [c,d]\right)$ и прямыми $y = c$, $y = d$, то объем тела, полученный при вращении этой фигуры вокруг оси Oy, можно найти по формуле

$$V = \pi \int_c^d \left(g_2^2(y) - g_1^2(y)\right) dy.$$

Пример 10.36. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $xy = 9$, $y = 0$, $x = 3$, $x = 6$ (рис. 10.14).

Р е ш е н и е. Находим

$$V = \pi \int_3^6 \left(\frac{9}{x}\right)^2 dx = 81\pi \int_3^6 x^{-2} dx = \frac{-81\pi}{x}\Bigg|_3^6 = -81\pi\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right) = \frac{27}{2}\pi.$$

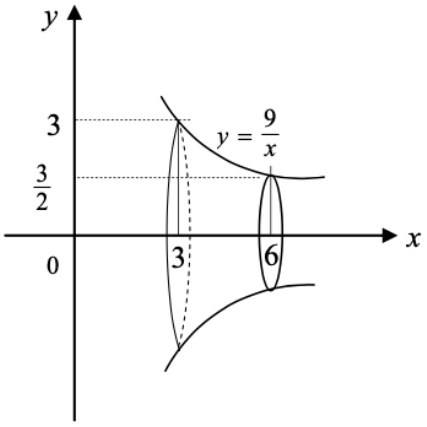

Рис. 10.14

Пример 10.37. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $4y = x^2$, $x + 4y - 12 = 0$ (рис. 10.15).

Р е ш е н и е. Найдем точки пересечения кривых. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} 4y = x^2, \\ 4y + x - 12 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4}, \\ x^2 + x - 12 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4}, \\ x_1 = -4, \;\; x_2 = 3. \end{cases}$$

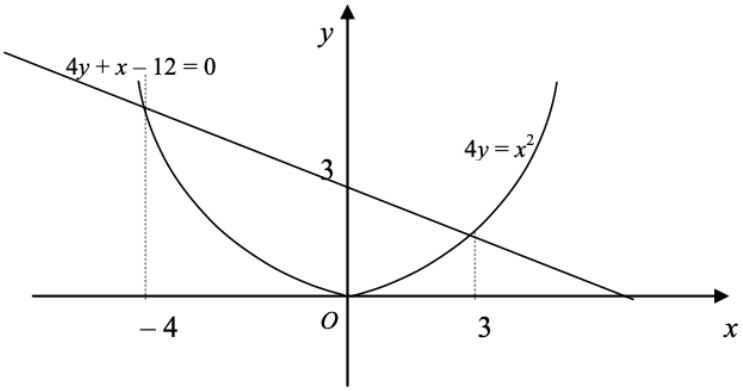

Рис. 10.15

Следовательно,

$$V = \pi \int_{-4}^{3} \left(\left(3 - \frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 \right) dx = \pi \int_{-4}^{3} \left(9 - \frac{3}{2}x + \frac{x^2}{16} - \frac{x^4}{16} \right) dx =$$

$$= \pi \left(9x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{48}x^3 - \frac{1}{80}x^5 \right) \Bigg|_{-4}^{3} = \pi \left(27 - \frac{27}{4} + \frac{9}{16} - \frac{243}{80} + 36 + 12 + \frac{4}{3} - \frac{64}{5} \right) =$$

$$= 54\frac{37}{120}\pi.$$

Пример 10.38. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $xy = 5$, $y = 1$, $y = 5$ и осью Oy (рис. 10.16).

Р е ш е н и е.

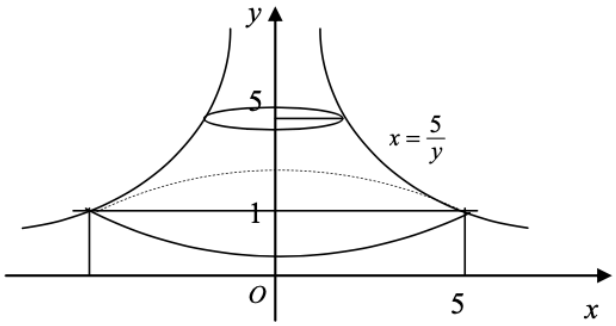

Рис. 10.16

Искомый объем

$$V=\pi\int_1^5\left(\frac{5}{y}\right)^2dy=25\pi\int_1^5 y^{-2}dy=\frac{-25\pi}{y}\Bigg|_1^5=-25\pi\left(\frac{1}{5}-1\right)=20\pi.$$

Пример 10.39. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y=\arccos\frac{x}{6}$, $y=\arccos\frac{x}{2}$, $y=0$ (рис. 10.17).

Р е ш е н и е.

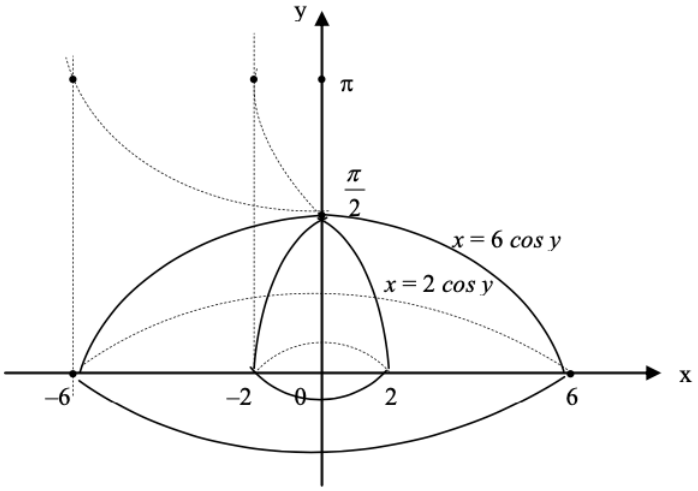

Рис. 10.17

Так как $y=\arccos\frac{x}{6}$, то $|x|\le 6$ и $x=6\cos y;\ y\in[0;\pi]$; при $x=0$ $y=\frac{\pi}{2}$.

Аналогично для $y=\arccos\frac{x}{2}$, $|x|\le 2$, $x=2\cos y;\ y\in[0;\pi]$. Значит,

$$V=\pi\int_0^{\pi/2}\left((6\cos y)^2-(2\cos y)^2\right)dy=32\pi\int_0^{\pi/2}\cos^2 y\,dy=16\pi\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2y)\,dy=$$

$$=16\pi\left(y+\frac{1}{2}\sin 2y\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=8\pi^2.$$