МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
(ФГБОУ ВПО «СамГТУ»)

К а ф е д р а «*Прикладная математика и информатика*»

Е.А. Просвиркина, С.Н. Кубышкина

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Практикум

Самара 2014

Печатается по решению редакционно-издательского совета

Самарского государственного технического университета.

УДК 512.643 (076.5)

ББК 22.1 я 73

Матрицы и определители: практикум. 2-е изд. доп. и перераб**.**

Е.А. Просвиркина, С.Н. Кубышкина.

Самар. гос. техн. ун-т; Самара, 2014. 64 с.

Рассматриваются элементы линейной алгебры и математического анализа: определители, матрицы, решение систем линейных уравнений. Основное внимание уделяется объяснению основных понятий и решению стандартных задач. В сборник включены задачи, охватывающие все разделы теоретического курса "Матрицы и определители". Предназначен для студентов МиАТ, ФТФ, ХТФ, ФПП.

Библиогр.: 7 назв.

Р е ц е н з е н т : канд. физико-математических наук, доцент Небогина Е.В.

ISBN

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемый практикум по высшей математике "Матрицы и определители" предназначен для студентов-бакалавров 1 курса машиностроительного, физико-технологического, химико-технологического факультетов и факультета пищевых производств.

Цель его - помочь студентам самостоятельно или с помощью преподавателя овладеть методами решения задач по разделу "Линейная алгебра". В каждом параграфе приводятся основные теоретические сведения и необходимые формулы. Особое внимание уделено решению типовых задач, которые даются с подробными решениями.

В пособии по каждой теме предлагаются задачи для разбора и решения в аудитории (часть А), а также задачи для самостоятельного решения (часть В). Задачи располагаются по мере возрастания их сложности. Ко всем задачам приведены ответы. В заключении приведён тренировочный тест для проверки знаний студентов по данному разделу.

1. МАТРИЦЫ. ДЕЙСТВИЯ С МАТРИЦАМИ

1.1. Основные сведения о матрицах

Матрицей размерности $m\times n$ называется совокупность чисел, расположенных в виде таблицы, содержащей m строк и n столбцов:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $a_{ij}\in R \ \left(i=1,2,\dots,m;\ \ j=1,2,\dots,n\right)$.

Числа a_{ij} называются *элементами матрицы*. Индекс i– номер строки (он всегда стоит на первом месте), j– номер столбца.

Матрицы обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита, в сокращённой записи:

$A=\left(a_{ij}\right)$; i =1, 2, …, m; j =1, 2, …, n. Например: $A_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

Если матрица состоит из одной строки, то она называется *матрицей–строкой* размерности $1\times n$:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

Если матрица состоит из одного столбца, то она называется *матрицей–столбцом* размерности $m\times 1$:

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix}.$$

При n=m матрица (1) называется *квадратной* матрицей n–го порядка.

Например: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – квадратная матрица третьего порядка.

Элементы матрицы a_{ij}, у которых номер строки равен номеру столбца $(i=j)$, называются *диагональными* и образуют *главную диагональ* матрицы.

Если все недиагональные элементы квадратной матрицы равны нулю, то матрица называется *диагональной*.

Если у диагональной матрицы n–го порядка все диагональные элементы равны единице, то матрица называется *единичной матрицей* n–го порядка, она обозначается E. Например: $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Матрица любого размера называется *нулевой*, или *нуль–матрицей*, если все её элементы равны нулю: $\mathrm{O}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.2. Операции над матрицами

Над матрицами, как и над числами, можно производить ряд операций, причём некоторые из них аналогичны операциям над числами, а некоторые специфические.

1. *Умножение матрицы на число*. Произведением матрицы A на число λ $(l\in R)$ называется матрица $B=\lambda\cdot A$ с элементами $b_{ij}=\lambda\cdot a_{ij}$ для $i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$ (размерности матриц A и B одинаковые).

Следствие. Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

Матрица $(-1)\cdot A$ называется *противоположной* матрице A и обозначается $-A$.

2. *Сложение матриц*. Суммой двух матриц A и B одинаковой размерности $m\times n$ называется матрица $C=A+B$ размерности $m\times n$, элементы которой определяются равенствами $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ для всех значений индексов i и j (т.е. две матрицы складываются поэлементно). В частном случае $A+0=A$, где 0– нулевая матрица.

3. *Вычитание матриц*. Разностью двух матриц A и B одинаковой размерности $m\times n$ называется матрица $C=A+(-1)\cdot B$ той же размерности, если для всех значений индексов i, j выполнены равенства $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$, (т.е. две матрицы вычитаются поэлементно).

4. *Умножение матриц*. Умножение матрицы A на матрицу B определено, когда <u>число столбцов первой</u> матрицы <u>равно числу строк второй</u>. Тогда произведением матриц $\underset{m\times k}{A}\cdot\underset{k\times n}{B}$ называется такая матрица $\underset{m\times n}{C}$, каждый элемент которой равен сумме произведений соответствующих элементов i–й строки первой матрицы на элементы j–го столбца второй матрицы:

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{ik}\cdot b_{kj}=\sum_{s=1}^{k}a_{is}\cdot b_{sj},$$

где $i=1, 2, \ldots, m$; $j=1, 2, \ldots, n$.

5. *Транспонирование матриц*. Транспонирование – переход от матрицы A к матрице A^{T}, в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка. Матрица A^{T} называется *транспонированной* относительно матрицы A.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1.1. Найти сумму матриц

$$A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 7\\ 5 & -2 & 0\\ 7 & 2 & 3\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 1 & 5 & -3\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Решение. Имеем $A+B=\begin{pmatrix} 4+3 & 3+2 & 7+4 \\ 5+1 & -2+5 & 0+(-3) \\ 7+(-1) & 2+0 & 3+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 5 & 11 \\ 6 & 3 & -3 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A+B=\begin{pmatrix} 7 & 5 & 11 \\ 6 & 3 & -3 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Пример 1.2. Найти матрицу $4\cdot A-5\cdot B-3\cdot E$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Имеем $4\cdot A=\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 28 & 32 \end{pmatrix}$, $5\cdot B=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 15 & -10 \end{pmatrix}$, $3\cdot E=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Найдём $4\cdot A-5\cdot B=\begin{pmatrix} 8-5 & 16-0 \\ 28-15 & 32-(-10) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 16 \\ 13 & 42 \end{pmatrix}$.

$4\cdot A-5\cdot B-3\cdot E=\begin{pmatrix} 3 & 16 \\ 13 & 42 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 13 & 39 \end{pmatrix}$.

Ответ: $4\cdot A-5\cdot B-3\cdot E=\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 13 & 39 \end{pmatrix}$.

Пример 1.3. Найти произведение матриц $B\cdot A$, если $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Произведение матриц $B\cdot A$ возможно, т.к. в матрице B три строки, а в матрице A три столбца. Матрица произведение $C=B\cdot A$ будет иметь размер 1×3. Заполним матрицу–строку C элементами:

$$C = B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \Big(\underline{3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot (-1)}$$

$$\underline{3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 2} \quad \underline{3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 1} \Big) = \begin{pmatrix} -5 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $B \cdot A = \begin{pmatrix} -5 & 9 & 6 \end{pmatrix}$.

Пример 1.4. Найти $\left((A - B) \cdot C \right)^T$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение. Найдём разность *A*–*B*:

$$A - B = \begin{pmatrix} 2-4 & -3-1 \\ 4-(-2) & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Произведение будет равно:

$$(A - B) \cdot C = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 3 + (-4) \cdot 1 & -2 \cdot 2 + (-4) \cdot (-1) \\ 6 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 6 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix}.$$

$$(A - B) \cdot C = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 19 & 11 \end{pmatrix}.$$

Осталось транспонировать матрицу: $\begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 19 & 11 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -10 & 19 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\left((A - B) \cdot C \right)^T = \begin{pmatrix} -10 & 19 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$.

Пример 1.5. Найти произведение элементов первого столбца матрицы $D = B \cdot A$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Произведение матриц $B \cdot A$ возможно: $2 \times \boxed{2 \cdot 2} \times 3$. Матрица *D*, будет иметь размер: 2×3. Найдём элементы матрицы *D*:

$$D=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+(-2)\cdot3 & 1\cdot2+(-2)\cdot(-1) & 1\cdot3+(-2)\cdot2\\ 0\cdot1+3\cdot3 & 0\cdot2+3\cdot(-1) & 0\cdot3+3\cdot2\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}-5 & 4 & -1\\ 9 & -3 & 6\end{pmatrix}.$$

Произведение элементов первого столбца матрицы D равно: $-5\cdot9=-45$.

<u>*Замечание.*</u> Элементы второго и третьего столбцов матрицы $D=B\cdot A$ нас не интересовали, значит, их можно было не рассчитывать.

Ответ: произведение элементов первого столбца матрицы D рано – 45.

Пример 1.6. Найти сумму элементов первой строки матрицы *B*, если $B=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 5 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$.

Решение. Можно отыскать всю матрицу произведение, а можно найти лишь элементы первой строки для решения поставленной задачи. Найдём все элементы искомой матрицы:

$$B=\begin{pmatrix}-3\cdot2+4\cdot1 & -3\cdot3+4\cdot(-2)\\ 5\cdot2+2\cdot1 & 5\cdot3+2\cdot(-2)\\ 0\cdot2+1\cdot1 & 0\cdot3+1\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -17\\ 12 & 11\\ 1 & -2\end{pmatrix}.$$

Сумма элементов первой строки: –2+(–17)= –19.

Ответ: сумма элементов первой строки равна –19.

Пример 1.7. Найти сумму элементов первого столбца матрицы $A^T\cdot B$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$.

Решение. Составим транспонированную матрицу
$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, произведение матриц $A^T \cdot B$ возможно, т.к. в матрице A^T три столбца, а в матрице *B* три строки, т.е. $3 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 1$.

$$A^T \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) \\ 0 \cdot (-3) + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \\ 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Для решения поставленной задачи необходимо было найти сумму элементов первого (единственного) столбца, она равна: $2 - 4 - 7 = -9$.

Ответ: сумма элементов первого столбца равна –9.

Пример 1.8. Найти произведение диагональных элементов матрицы $C = -2 \cdot A \cdot B$, если $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Произведение $-2 \cdot A \cdot B$ возможно, так как $3 \times \boxed{1 \cdot 1} \times 3$, размер результирующей матрицы 3×3. Для решения поставленной задачи упростим решение, т.е. заполним в матрице *C* только диагональные элементы:

$$C = -2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -1 \cdot 3 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 2 \cdot (-1) & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 4 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -4 \end{pmatrix}$$

Произведение диагональных элементов равно: $6 \cdot 4 \cdot (-4) = -96$.

Ответ: произведение диагональных элементов равно – 96.

Задания для самостоятельного решения по теме «Матрицы. Действия с матрицами»

Группа *A*

1.*A*. Найти матрицу $3\cdot A+4\cdot B-5\cdot E$, если $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, E - единичная матрица.

Ответ: $\begin{pmatrix}-3 & 17\\ 24 & -10\end{pmatrix}$.

2.А. Найти матрицу $\frac{1}{3}\cdot A-2\cdot B^T\cdot C$, если $A=\begin{pmatrix}3 & 27\\ -9 & 0\\ 0 & -6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & -1\end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix}-11 & 13\\ 3 & -2\\ -6 & 0\end{pmatrix}$.

3.*A*. Вычислить матрицу $D=(A\cdot B)^T-C^2$, если $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\\ 0 & 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$.

Ответ: $D=\begin{pmatrix}9 & -13\\ 22 & 9\end{pmatrix}$.

4.*А*. Найти произведение матриц $A\cdot B\cdot C$ и $C\cdot A\cdot B^T$, если $A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 7 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}7 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

Ответ: $A\cdot B\cdot C=\begin{pmatrix}-5 & 9\\ -15 & 14\end{pmatrix}$; $C\cdot A\cdot B^T=\begin{pmatrix}10 & 75\\ -1 & -1\end{pmatrix}$.

5.*А*. Вычислить матрицу $D=A\cdot B\cdot C-3\cdot E$, где $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & 0 & 2\\ 4 & 5 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 0 & 5\end{pmatrix}$, E – единичная матрица.

Ответ: $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 10\\ 6 & -3 & 15\\ 34 & 0 & 82\end{pmatrix}$.

6.*А*. Вычислить A^2 и $\left(A-A^T\right)^2$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

Ответ: $A^2=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 4 & 2 & -5\\ -1 & 3 & -4\end{pmatrix}$; $\left(A-A^T\right)^2=\begin{pmatrix}-13 & 9 & -6\\ 9 & -13 & -6\\ -6 & -6 & -18\end{pmatrix}$.

Указание. По определению квадратом матрицы A называется матрица $A^2=A\cdot A$, кубом $A^3=A\cdot A\cdot A$, . . ., $A^n=A^{n-1}\cdot A$.

7.*А*. Найти произведение матриц $A\cdot B$, $B\cdot A$ и $\left(A+B^T\right)\cdot B$, если $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 5\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

Ответ: $A\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 12\\ 1 & 17\end{pmatrix}$; $B\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 9 & 6\\ 2 & 16 & 11\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}$;

$\left(A+B^T\right)\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 16\\ 5 & 52\end{pmatrix}$.

Задания для самостоятельного решения по теме «Матрицы. Действия с матрицами»

Группа *B*

1.*B*. Вычислить произведение матриц $B\cdot A$ и $A\cdot B^T$, если $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 5 & 1 & 4\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

Ответ: $B\cdot A=\begin{pmatrix}-5 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 7\end{pmatrix}$; $A\cdot B^T=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 13 & 16\\ 0 & -6\end{pmatrix}$.

2.*B*. Найти произведение матриц $A\cdot B$, $B\cdot A$ и сумму $3\cdot A^T+2\cdot B$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 6 & 8\end{pmatrix}$.

Ответ: $A\cdot B=\begin{pmatrix}12 & 21\\ 24 & 47\end{pmatrix}$; $B\cdot A=\begin{pmatrix}15 & 20\\ 30 & 44\end{pmatrix}$;

$3\cdot A^T+2\cdot B=\begin{pmatrix}3 & 19\\ 18 & 28\end{pmatrix}$.

3.*B*. Вычислить A^3 и $2\cdot A^2-3\cdot A$, если $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$.

Ответ: $A^3=\begin{pmatrix} 37 & -54 \\ -81 & 118 \end{pmatrix}$; $2\cdot A^2-3\cdot A=\begin{pmatrix} 11 & -14 \\ -21 & 32 \end{pmatrix}$.

4.*В*. Найти $A^T\cdot C$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 4 & -9 & 1 & -2 \\ 5 & -12 & 2 & -1 \\ 6 & -15 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

5.*В*. Найти сумму элементов третьего столбца произведения матриц A и B, предварительно выяснив, какое из произведений существует, если $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ответ: сумма элементов третьего столбца произведения $B\cdot A$ равна 2.

6.*В*. Найти произведения матриц $A^T\cdot B$ и $B^T\cdot A$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A^T\cdot B=\begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ -9 & 6 & -3 \end{pmatrix}$; $B^T\cdot A=\begin{pmatrix} 6 & -3 & -9 \\ -4 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

7.*В*. Найти произведения матриц $A\cdot B$ и $B\cdot A^T$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -6 & 5 & -9 \\ -3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A\cdot B=\begin{pmatrix} 7 & 6 & 10 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$; $B\cdot A^T=\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -34 & 5 \\ -25 & 7 \end{pmatrix}$.

2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. МЕТОД КРАМЕРА РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Определители. Способы вычисления определителей

Необходимость введения определителя – числа, характеризующего квадратную матрицу *A*, тесно связано с решением систем линейных уравнений (СЛУ).

Определителем матрицы первого порядка $A=(a_{11})$, или определителем первого порядка, называется элемент a_{11}.

Обозначают определитель матрицы *A* как: Δ, $\det A$ или $|A|$.

Определителем матрицы второго порядка $A=(a_{ij})$, или определителем второго порядка, называется число, которое вычисляется по формуле:

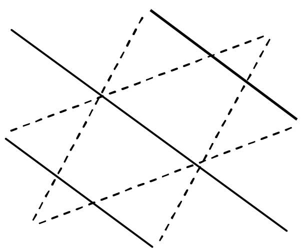
$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}.$$

Определителем матрицы третьего порядка $A=(a_{ij})$, или определителем третьего порядка, называется число, которое вычисляется по формуле:

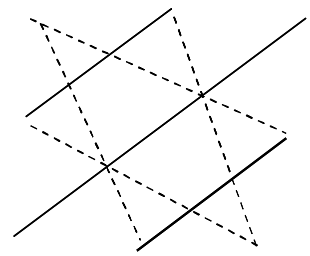
$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}-$$

$$-(a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}+a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}+a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}).$$

Знаки, с которыми члены определителя входят в формулу, легко запомнить, пользуясь схемой, которая называется «*правилом треугольников*»: определитель представляет собой алгебраическую сумму шести членов, при этом знак *плюс* имеет произведение элементов главной диагонали и два произведения элементов, образующих в матрице равнобедренные треугольники с основаниями, параллельными главной диагонали; знак *минус* имеет произведение элементов побочной диагонали и два произведения элементов, образующих в матрице равнобедренные треугольники с основаниями, параллельными побочной диагонали. Схема приведена ниже:



$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



Для нахождения значения определителя третьего порядка также можно пользоваться правилом Саррюса: приписать к определителю справа два первых столбца, не меняя их порядка, и составить сумму произведений элементов главной диагонали и элементов, параллельных ей, из которой затем вычесть сумму произведений элементов побочной диагонали и элементов, параллельных ей:

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{21} & a_{32} \\ "-" & "-" & "\mu" & "+" & "+" \end{array} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} -$$
$$-\left(a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}\right).$$

Свойства определителей:

1 – Определитель не изменится, если строки определителя заменить столбцами, а столбцы - соответствующими строками.

2 – Общий множитель всех элементов какой-нибудь строки (или столбца) можно выносить за знак определителя.

3 – Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

4 – При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный.

5 – Определитель с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю.

6 – Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

Определителем квадратной матрицы n–го порядка, называется число, равное алгебраической сумме $n!$ членов, каждый из которых является произведением n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(J)} (-1)^{r(J)} \cdot a_{1J_1} \cdot a_{2J_2} \cdot \ldots \cdot a_{nJ_n} .$$

Причём знак каждого члена определяется как $(-1)^{r(J)}$, где $r(J)$ – число инверсий в перестановке J из номеров столбцов элементов матрицы, если при этом номера строк записаны в порядке возрастания. Сумма берётся по всем перестановкам.

Замечание. *Инверсия* (беспорядок) в перестановке J – это наличие пары чисел, в которой большее число предшествует меньшему. Например, в перестановке из трёх чисел J=(2; 1; 3) имеется одна инверсия (2; 1), а в перестановке J=(3; 2; 1)– три: (3; 2), (3;1), (2; 1).

Проверим, например, что при n=3 мы получим введённый ранее определитель третьего порядка:

$$\Delta = (-1)^0 \cdot a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^2 \cdot a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^2 \cdot a_{13}a_{21}a_{32} +$$
$$+ (-1)^3 a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + (-1)^1 a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + (-1)^1 a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32},$$

т.е. тоже выражение, что и полученное ранее по правилу треугольников.

С ростом порядка матрицы расчёт определителя по определению становится затруднительным (для n= 4 по определению получим 24 слагаемых).

На практике расчёт определителей n –го порядка удобнее вести с помощью разложения по элементам строки или столбца. Для использования этого метода введём определения минора и алгебраического дополнения.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы n–го порядка называется определитель матрицы (n–1) –го порядка, полученной из матрицы A вычёркиванием i –й строки и j –го столбца. Каждая матрица n –го порядка имеет n^2 миноров (n–1) –го порядка.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n –го порядка называется соответствующий этому элементу минор, умноженный на $(-1)^{i+j}$, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Теорема разложения. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки или столбца на соответствующие им алгебраические дополнения:

$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{is}$ –разложение по элементам i–ой строки; i = 1, 2, …, n.

$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj}A_{sj}$ –разложение по элементам j–го столбца; j = 1, 2, …, m.

2.2. Решение систем линейных уравнений методом Крамера

С помощью определителей очень удобно записывать решение СЛУ.

Рассмотрим систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (2)$$

Определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется главным определителем системы (2).

Если $\Delta \neq 0$, система (2) имеет единственное решение, которое определяется по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \qquad (3)$$

где $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$; $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$,

т.е. определители Δ_1, Δ_2, Δ_3 получаются из определителя Δ путём замены его первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов системы (2). Формулы (3) называются *формулами Крамера*.

Формулы Крамера обобщаются и на систему n линейных уравнений с n неизвестными.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 2.1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, *а*) по правилу треугольника; *б*) разложением по элементам первой строки; *в*) разложением по элементам второго столбца.

Решение. *а*) Воспользуемся правилом треугольника:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\cdot(-2)\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot(-2) + 1\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot(-2)\cdot(-2) - 1\cdot 1\cdot 1 -$$
$$-1\cdot 1\cdot 0 = -9;$$

б) вычислим определитель разложением по первой строке:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\cdot A_{11} + 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= -1\cdot\left(1\cdot 1 - 1\cdot(-2)\right) + 2\cdot\left(1\cdot 1 - (-2)\cdot(-2)\right) = -3 - 6 = -9;$$

в) вычислим определитель разложением по второму столбцу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (-2)\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} +$$
$$+1\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1\cdot\left(1\cdot 1 - 1\cdot(-2)\right) - 2\cdot\left(0\cdot 1 - 2\cdot(-2)\right) - 1\cdot\left(0\cdot 1 - 2\cdot 1\right) =$$
$$= -3 - 8 + 2 = -9.$$

Ответ: –9.

Величина определителя характеризует матрицу и не зависит от способа расчёта. Так для матрицы из примера 2.1 было получено единственное, соответствующее матрице, число.

Пример 2.2. Вычислить определитель разложением по элементам третьего столбца: $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -5 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = -1\cdot 7 = -7$.

Ответ: –7.

Пример 2.3. Вычислить определители, пользуясь их свойствами: *а*) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$, *б*) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$, *в*) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение.

а) К элементам 2-й строки прибавим соответствующие элементы 1-й строки, а из элементов 3-й строки вычтем удвоенные элементы 1-й строки: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

Разложим определитель по элементам третьего столбца, получим: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -6+15 = 9$.

б) К элементам 2-й строки прибавим удвоенные элементы 1-й строки; из элементов 3-й строки вычтем элементы 1-й строки, умноженные на 3 и вынесем –2 (общий множитель элементов 3-й строки) за знак определителя: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -10 & -10 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} = -2\cdot 0 = 0$

(две одинаковые строки, свойство 3).

в) К элементам 3-й строки прибавим соответствующие элементы 1-й строки и разложим определитель по элементам 3-й строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot \left(1 - (-1)\right) = -4.$$

Ответ: *а*) 9; *б*) 0; *в*) –4.

Пример 2.4. Найти определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} \sin 3x & -\cos 3x \\ \cos 3x & \sin 3x \end{pmatrix}$.

Решение. $\Delta = \begin{vmatrix} \sin 3x & -\cos 3x \\ \cos 3x & \sin 3x \end{vmatrix} = \sin^2 3x + \cos^2 3x = 1$.

Ответ: 1.

Пример 2.5. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} 2x^2 - 7 & 2 \\ 3x & 1 \end{vmatrix} < 1$

Решение. Раскроем определитель: $2x^2 - 7 - 6x < 1$, приведём подобные: $2x^2 - 6x - 8 < 0$. Разложим квадратный трёхчлен на линейные множители: $2 \cdot (x-4)(x+1) < 0$. Решим это неравенство методом интервалов, получим $x \in (-1; 4)$.

Ответ: $(-1; 4)$.

Пример 2.6. Решить уравнение: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & x-1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$.

Решение. Найдем определитель: $1 - x + x - 2x^2 + 2x - 2 = -5$, приведём подобные $-2x^2 + 2x + 4 = 0$, разделим на –2 обе части уравнения: $x^2 - x - 2 = 0$. Корнями уравнения, по теореме Виета, являются числа –1 и 2.

Ответ: $x_1 = -1;\ x_2 = 2$.

Пример 2.7. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -5x \\ 7x & 2 & -1 \end{vmatrix} > -24$.

Решение.

Раскроем определитель: $-3x - 70x^2 + 6 - 21x + 10x^2 + 6 > -24$, приведём подобные: $-60x^2 - 24x + 36 > 0$, разделим обе части неравенства на –12, со сменой знака неравенства: $5x^2 + 2x - 3 < 0$. Разложим квадратный трёхчлен на произведение линейных множителей: $5\cdot(x+1)(x-0,6) < 0$. Решение, согласно методу интервалов, запишется в виде: $x \in (-1;\quad 0,6)$.

Ответ: $x \in (-1;\quad 0,6)$.

Пример 2.8. Докажите тождество: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix}$.

Решение. Если найденные определители обеих частей равенства окажутся одинаковыми, то тождество будет доказано. Найдём величину определителя в левой части: $\Delta_{лев.} = 27 + 16 - 10 - 12 - 30 + 12 = 3$.

Значение определителя правой части:
$\Delta_{прав.} = 99 - 16 - 70 - 84 + 30 + 44 = 3$, тождество доказано.

Пример 2.9. Вычислить определитель четвёртого порядка:
$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Разложим определитель, например, по элементам первой строки: $\Delta = -5\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 1 & -8 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -4 & -8 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} +$

$$+(-4)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 4 & 5\\ -4 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix}1 & 4 & -1\\ -4 & 1 & -8\\ 3 & 2 & 6\end{vmatrix}=-5\cdot 74-(-15)-$$

$$-4\cdot(-31)-33=-370+15+124-33=-264.$$

Ответ: -264.

Пример 2.10. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 2 & -2\end{vmatrix}$.

Решение. Вынесем за знак определителя общий множитель 4-го столбца. Из элементов 3-й и 2-й строк вычтем элементы 1-й строки, прибавим к элементам 4-й строки элементы 1-й строки, затем разложим определитель по элементам 4-го столбца:

$$\Delta = 2\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2 & -1\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 3 & 4 & 4 & 0\end{vmatrix}=-2\cdot\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 3 & 4 & 4\end{vmatrix}.$$

Прибавим к элементам 3-й строки элементы 1-й строки, умноженные на 4 и разложим определитель по элементам 2-го столбца:

$$\Delta=-2\cdot\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 7 & 0 & 4\end{vmatrix}=-2\cdot(-1)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 7 & 4\end{vmatrix}=-2\cdot\big(4-(-7)\big)=-22.$$

Ответ: -22.

Пример 2.11. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера: $\begin{cases}2x+3y+2z=9;\\ x+2y-3z=14;\\ 3x+4y+z=16.\end{cases}$

Решение. $\Delta=\begin{vmatrix}2&3&2\\1&2&-3\\3&4&1\end{vmatrix}=4-27+8-12-3+24=-6$. Определитель данной системы отличен от нуля, следовательно, она имеет единственное решение. Находим его по формулам Крамера.

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}9&3&2\\14&2&-3\\16&4&1\end{vmatrix}=18-144+112-64-42+108=-12.$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-12}{-6}=2.$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}2&9&2\\1&14&-3\\3&16&1\end{vmatrix}=28-81+48-84-9+96=-18.$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-18}{-6}=3.$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}2&3&9\\1&2&14\\3&4&16\end{vmatrix}=64+126+36-54-112-48=12.$$

$$z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{12}{-6}=-2.$$

Ответ: $x=2,\ y=3,\ z=-2$.

Пример 2.12. Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases}x+2y+3z=7;\\x-3y+2z=5;\\x+y+z=3.\end{cases}$$

Решение. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3+4+3+9-2-2 = 9 \neq 0$.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -21+12+15-(-27)-14-10 = 9.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5+14+9-15-6-7 = 0.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -9+10+7+21-5-6 = 18.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{9}{9} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{0}{9} = 0, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{18}{9} = 2.$$

Ответ: $x = 1,\ y = 0,\ z = 2$.

Задания для самостоятельного решения.
по теме « Определители. Решение СЛУ методом Крамера »

Группа *А*

1.А. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{5} \\ 2+\sqrt{5} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & -a \\ 2+a & 1-2a \end{vmatrix}$.

Ответ: *а*) 0; *б*) a^2+1.

2.А. Решить неравенства:

а) $\begin{vmatrix} 3x^2-7 & 4 \\ 3x & 2 \end{vmatrix} < 4$, б) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ x^2-2 & x-1 \end{vmatrix} \geq -1$.

Ответ: $\quad a)\ x \in (-1;\,3)$; $\ б)\ x \in \left[-\frac{1}{3};\,2\right]$.

3.А. Решить системы уравнений, используя формулы Крамера:

$a)\ \begin{cases} 4x - 2y = 4; \\ y - 3x + 2 = 0; \end{cases} \qquad б)\ \begin{cases} 6x + 7y + 13 = 0; \\ 5x - 19y = 14. \end{cases}$

Ответ: $\quad a)\ x = 0,\ y = -2; \quad б)\ x = -1,\ y = -1.$

4.А. Вычислить определители:

$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ b & 0 & 0 \\ -b & 0 & b \end{vmatrix}, \qquad б)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad в)\ \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}.$

Ответ: $\quad a) -b^2; \quad б)\ -2; \quad в)\ -1.$

5.А. Решить уравнения:

$a)\ \begin{vmatrix} x-2 & 3 & x \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad б)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0.$

Ответ: $\quad a)\ x = -3; \quad б)\ x_1 = 0,\ x_2 = 1.$

6.А. Вычислить $\left|(A - B)\cdot C\right|$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Ответ: –88.

7.А. Вычислить определители четвёртого порядка:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, *б*) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$, *в*) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Ответ: *а*) 1; *б*) 0; *в*) -58.

8.А. Доказать равенство: $4\cos 2b \cdot \cos b = \begin{vmatrix} 2\cos b & 1 & 0 \\ 1 & 2\cos b & 1 \\ 0 & 1 & 2\cos b \end{vmatrix}$.

В задачах ***9.А–12.А*** решить системы уравнений по формулам Крамера.

9.А. $\begin{cases} x + 2y + z = 4; \\ 3x - 5y + 3z = 1; \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases}$ *Ответ*: $x = 1;\ y = 1;\ z = 1$.

10.А. $\begin{cases} 5x + 8y + z = 2; \\ 3x - 2y + 6z = -7; \\ 2x + y - z = -5. \end{cases}$ *Ответ*: $x = -3;\ y = 2;\ z = 1$.

11.А. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 3; \\ 5x - 2y - 2z = 3; \\ x + y - z = -2. \end{cases}$ *Ответ*: $x = 1;\ y = -1;\ z = 2$.

12.А. $\begin{cases} x + y - z = 36; \\ x + z - y = 13; \\ y + z - x = 7. \end{cases}$ *Ответ*: $x = 24{,}5;\ y = 21{,}5;\ z = 10$.

Задания для самостоятельного решения по теме «Определители. Решение СЛУ методом Крамера»

Группа В

1.В. Вычислить определители:

$$а)\begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 14 & 2 & -3 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix},\qquad б)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix},\qquad в)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}.$$

Ответ: *а*) -12; *б*) -8; *в*) 4.

2.В. Решить неравенства:

$$а)\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0,\qquad б)\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} < 0.$$

Ответ: *а*) $x \in (-6; -4)$; *б*) $x \in (-3; \infty)$.

3.В. Вычислить определители четвёртого порядка:

$$а)\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix},\qquad б)\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix},\qquad в)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ответ: *а*) -96; *б*) 1; *в*) -9.

4.В. Решить относительно неизвестного l уравнение $|A - l\,E| = 0$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $l_1 = 0;\ l_2 = 0;\ l_3 = 6$.

5.В. Доказать равенство: $\begin{vmatrix} \cos a & 1 & 0 \\ 1 & 2\cos a & 1 \\ 0 & 1 & 2\cos a \end{vmatrix} = \cos 3a$.

В задачах ***6.В–11.В*** решить системы уравнений методом Крамера.

6.В. $\begin{cases} 3x + 4y = 6; \\ 5x + 7y = 8. \end{cases}$ *Ответ*: $x = 10;\ y = -6$.

7.В. $\begin{cases} x\cos a - y\sin a = \cos 2a; \\ x\sin a + y\cos a = \sin 2a. \end{cases}$ *Ответ*: $x = \cos a;\ y = \sin a$.

8.В. $\begin{cases} 2x - 4y - 9z = 13; \\ x + 2y + 6z + 4 = 0; \\ 7x - y + 9z = 5. \end{cases}$ *Ответ*: $x = 2;\ y = 0;\ z = -1.$

9.В. $\begin{cases} x + y + z = a; \\ x - y + z = b; \\ x + y - z = c. \end{cases}$ *Ответ*: $x = \dfrac{b+c}{2};\ y = \dfrac{a-b}{2};\ z = \dfrac{a-c}{2}.$

10.В. $\begin{cases} 2x - 4y - 9z = 7; \\ 7x + 3y - 6z = 16; \\ 7x - 9y - 9z = 7. \end{cases}$ *Ответ*: $x = 1;\ y = 1;\ z = -1.$

11.В. $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 15; \\ x + y + 5z = 16; \\ 3x - 2y + z = 1. \end{cases}$ *Ответ*: $x = 0;\ y = 1;\ z = 3.$

3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Пусть A– квадратная невырожденная матрица, т.е. $\det A \neq 0$. Матрица A^{-1}, удовлетворяющая условию: $A \cdot A^{-1} = E$, называется *обратной* к матрице A, а сама матрица A называется обратимой или невырожденной. Необходимым условием существования обратимости матрицы A является то, что её определитель должен быть отличен от нуля. Формула расчёта обратной матрицы размера $n \times n$ имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где $\det A$– определитель матрицы A, A_{ij} – алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} матрицы A.

В частности, для матрицы размера 3×3 имеем:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

С помощью обратной матрицы можно находить решения СЛУ.

Пусть требуется решить систему n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{4}$$

Введём обозначения матриц:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Найдём решение системы уравнений (4) в матричной форме: используя правило умножения матриц и условие равенства матриц, систему уравнений (4) можно представить в виде:

$$A \cdot X = B;$$
$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B;$$
$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B;$$
$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Таким образом, чтобы найти матрицу неизвестных *X*, достаточно найти A^{-1} и умножить её на матрицу свободных членов *B*.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 3.1. Найти обратные матрицы для заданных матриц:

а) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, *б*) $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

а) Определитель матрицы $A = -17 \neq 0$.

Найдём алгебраические дополнения элементов матрицы *A*:

$A_{11} = (-1)^2 \cdot 2 = 2$; $A_{12} = (-1)^3 \cdot 5 = -5$;

$A_{21} = (-1)^3 \cdot 5 = -5$; $A_{22} = (-1)^4 \cdot 4 = 4$.

Матрица A^{-1}, обратная для матрицы *A*, имеет вид:

$$A^{-1} = -\frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{17} & \frac{5}{17} \\ \frac{5}{17} & -\frac{4}{17} \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку: $A^{-1} \cdot A = -\frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} =$

$$= -\frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} -17 & 0 \\ 0 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

б) Определитель матрицы B равен –7. Найдём алгебраические дополнения элементов матрицы B:

$$A_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2;\quad A_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}4 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-3;\quad A_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}4 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-2;$$

$$A_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1;\quad A_{22}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2;\quad A_{23}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1;\quad A_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 4 & 1\end{vmatrix}=2;\quad A_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=-8.$$

Следовательно, $B^{-1}=-\dfrac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -3 & -2 & 2\\ -2 & 1 & -8\end{pmatrix}$.

Ответ: а) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\dfrac{2}{17} & \dfrac{5}{17}\\ \dfrac{5}{17} & -\dfrac{4}{17}\end{pmatrix}$; *б*) $B^{-1}=\begin{pmatrix}-\dfrac{2}{7} & \dfrac{1}{7} & -\dfrac{1}{7}\\ \dfrac{3}{7} & \dfrac{2}{7} & -\dfrac{2}{7}\\ \dfrac{2}{7} & -\dfrac{1}{7} & \dfrac{8}{7}\end{pmatrix}$.

Пример 3.2. Найти решение СЛУ с помощью обратной матрицы: *а*) $\begin{cases}3x+2y+2z=5;\\ x+3y+z=1;\\ 5x+3y+4z=0;\end{cases}$ *б*) $\begin{cases}3x+4y=11;\\ 5y+6z=28;\\ x+2z=7.\end{cases}$

Решение.

Введём обозначения матриц: $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 5 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\ 0 & 5 & 6\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

а) Вычислим определитель матрицы *A*: $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 5$.

Так как определитель матрицы *A* отличен от нуля, то существует обратная матрица A^{-1} и система имеет единственное решение. Найдём обратную матрицу. Для этого вычислим алгебраические дополнения всех элементов матрицы *A*:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1$; $A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -12$;

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$; $A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1$;

$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4$; $A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$; $A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$.

Следовательно, $A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

Решение системы запишется в виде:

$$X = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 43 \\ 7 \\ -59 \end{pmatrix}.$$

б) Определитель матрицы *B* равен: $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 54 \neq 0$. Найдём алгебраические дополнения всех элементов матрицы *B*:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 10$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6$; $A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5$;

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -8$; $A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4$;

$$A_{31}=\begin{vmatrix}4 & 0\\ 5 & 6\end{vmatrix}=24; \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 6\end{vmatrix}=-18; \qquad A_{33}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 0 & 5\end{vmatrix}=15.$$

Таким образом, обратная матрица и решение СЛУ имеют вид:

$$B^{-1}=\frac{1}{54}\cdot\begin{pmatrix}10 & -8 & 24\\ 6 & 6 & -18\\ -5 & 4 & 15\end{pmatrix}, \qquad X=\frac{1}{54}\cdot\begin{pmatrix}10 & -8 & 24\\ 6 & 6 & -18\\ -5 & 4 & 15\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}11\\ 28\\ 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

Ответ: *а*) $x=\frac{43}{5}$, $y=\frac{7}{5}$, $z=\frac{-59}{5}$; *б*) $x=1$, $y=2$, $z=3$.

Пример 3.3. Средствами матричного исчисления решить систему уравнений $\begin{cases}2x-4y+9z=28;\\ 7x+3y-6z=-1;\\ 7x+9y-9z=5.\end{cases}$

Решение. Исходную СЛУ можно представить в матричном виде:

$$A\cdot X=B,$$

где $A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 9\\ 7 & 3 & -6\\ 7 & 9 & -9\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}28\\ -1\\ 5\end{pmatrix}$.

Определитель матрицы A равен: $\det A=\begin{vmatrix}2 & -4 & 9\\ 7 & 3 & -6\\ 7 & 9 & -9\end{vmatrix}=348\neq 0$.

Найдём обратную матрицу: $A^{-1}=\frac{1}{348}\cdot\begin{pmatrix}27 & 45 & -3\\ 21 & -81 & 75\\ 42 & -46 & 34\end{pmatrix}$.

Следовательно, решение данной системы имеет вид:

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{348}\cdot\begin{pmatrix}27 & 45 & -3\\ 21 & -81 & 75\\ 42 & -46 & 34\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}28\\ -1\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 4\end{pmatrix}.$$

Ответ: $x=2$, $y=3$, $z=4$.

Пример 3.4. Найти матрицу *X* из уравнения: $X\cdot\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Решение. Введём обозначения:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}.$$

Данное уравнение можно записать в виде: $X\cdot A=B$. Умножим обе части уравнения справа на A^{-1}, получим:

$$X\cdot A\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1},$$
$$X\cdot E=B\cdot A^{-1},$$
$$X=B\cdot A^{-1}.$$

Значит, для решения исходного уравнения нужно найти обратную матрицу A^{-1} и умножить матрицу-столбец *B* на матрицу A^{-1}. Определитель матрицы $A=1\neq 0$. Найдём обратную матрицу для матрицы *A*. Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11}=3,\qquad A_{12}=-1,\qquad A_{21}=-5,\qquad A_{22}=2.$$

Следовательно, обратная матрица и решение исходного уравнения имеют вид:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -8\\ 2 & -3\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix}5 & -8\\ 2 & -3\end{pmatrix}$.

Задания для самостоятельного решения по теме «Обратная матрица. Решение СЛУ с помощью обратной матрицы»

Группа А

1.А. Вычислить:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}^{-1}$, б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$, в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Ответ: *а*) $\begin{pmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$; *б*) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; *в*) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.А. Вычислить обратные к заданным матрицам:

а) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Ответ: *а*) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; *б*) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; *в*) $\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & -1 & \frac{4}{5} \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{5} & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

3.А. Вычислить произведения матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; *б*) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$.

Ответ: *а*) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; *б*) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$.

4.А. Решить СЛУ средствами матричного исчисления:

а) $\begin{cases} x+2y=-4; \\ 3x+4y=6; \end{cases}$ *б*) $\begin{cases} x+4y-5z=8; \\ 2x+3y-4z=9; \\ x-2y-z=6; \end{cases}$ *в*) $\begin{cases} x+2y-z=3; \\ 5x+12y-2z=-1; \\ 4x+9y-2z=2. \end{cases}$

Ответ: *а*) $x=14$, $y=-9$; *б*) $x=2$, $y=-1$, $z=-2$;
в) $x=3$, $y=-2$, $z=-4$.

5.А. Найти матрицу X из уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; *б*) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \end{pmatrix}$;

в) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix}$; *г*) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}^T$.

Ответ: *а*) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; *б*) $\begin{pmatrix} -7 \\ 24 \end{pmatrix}$; *в*) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Задания для самостоятельного решения по теме «Обратная матрица. Решение СЛУ с помощью обратной матрицы»

Группа В

1.В. Вычислить:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}^{-1}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$.

Ответ: *а*) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$; *б*) $\begin{pmatrix} 21 & -10 & -4 \\ -10 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; *в*) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.В. Вычислить обратную к данной матрице:

а) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *б*) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, *в*) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Ответ: *а*) $\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; *б*) $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$; *в*) $\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3.В. Решить СЛУ с помощью обратной матрицы:

а) $\begin{cases} x+2y+4z=6; \\ 5x+y+2z=12; \\ 3x-y+z=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x+2y+z=0; \\ 7x-10y-5z=-2; \\ 4x-7y-6z=-8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x+y-3z=7; \\ x+2y+z=4; \\ 3x-y+2z=-1. \end{cases}$

Ответ: *а*) $x=2$, $y=4$, $z=-1$; *б*) $x=-1$, $y=-2$, $z=3$;
в) $x=1$, $y=2$, $z=-1$.

4.В. Вычислить произведения матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix}$.

Ответ: *а*) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2{,}5 & 1 \\ -0{,}5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; *б*) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5.В. Найти матрицу *X* из уравнения:

а) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; б) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -9 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 7 & -3 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$.

Ответ: *а*) $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$; *б*) $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. МЕТОД ГАУССА РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Ранг матрицы и его вычисление

В матрице *A* размера $m \times n$ вычёркиванием каких-либо строк и столбцов можно вычленить квадратные матрицы k–го порядка, где $k \le \min(m;n)$. Определители таких подматриц называются минорами

k–го порядка матрицы A. Например, для матрицы $A_{3\times 4}$ можно получить подматрицы первого, второго и третьего порядков.

Рангом матрицы A называется наибольший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Всякий отличный от нуля минор матрицы, порядок которого равен рангу этой матрицы, называется *базисным минором* матрицы.

Ранг матрицы A обозначается $rang\ A$ или $r(A)$. Из определения ранга матрицы следует:

а) ранг матрицы $A_{m\times n}$ не превосходит меньшего из её размеров, т.е. $r(A)\le \min(m;n)$;

б) $r(A)=0$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы равны нулю, т.е. $A=0$ (нуль-матрица);

в) для квадратной матрицы n–го порядка $r(A)=n$ тогда и только тогда, когда матрица A –невырожденная.

Так, например, для матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ можно составить 12 миноров первого порядка –это сами элементы матрицы A, 18 миноров второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$ и 4 минора третьего порядка: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

Нетрудно проверить, что все миноры третьего порядка матрицы A равны нулю, а миноры второго порядка не равны нулю (отличен от нуля уже первый из выписанных выше миноров второго порядка). Поэтому будем говорить, что ранг матрицы A равен 2.

В общем случае определение ранга матрицы перебором всех миноров достаточно трудоёмко. Для облегчения этой задачи используются *элементарные преобразования матрицы*:

1) вычёркивание нулевой строки (столбца);

2) умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число, не равное нулю;

3) изменение порядка строк (столбцов) матрицы;

4) прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на число, отличное от нуля;

5) транспонирование матрицы.

В результате таких преобразований можно преобразовать исходную матрицу в единичную. Число единиц на главной диагонали равно рангу этой матрицы.

4.2. Теорема Кронекера-Капелли

Нахождение ранга матрицы позволяет упростить решение системы линейных уравнений.

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{5}$$

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. Если же система не имеет ни одного решения, то она называется *несовместной*.

Совместная система называется *определённой*, если она имеет только одно решение, и *неопределённой*, если таких решений более одного.

Матрицы $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ называются соответственно основной матрицей и расширенной матрицей системы (5). Очевидно, что $rang\,A \le rang\,B$.

Вопрос о разрешимости системы в общем случае рассматривается в теореме *Кронекера–Капелли*:

система линейных уравнений совместна (имеет решение) *тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы A* (матрицы коэффициентов при неизвестных) *равен рангу расширенной матрицы B* (матрица системы с добавленным столбцом свободных членов) *этой системы*.

Из теоремы Кронекера-Капелли следует, что:

1. Если ранг матрицы совместной системы равен числу переменных, то система является определённой и имеет единственное решение, т.е. $rang\,A = rang\,B = n$.
2. Если ранг матрицы совместной системы меньше числа переменных, то система неопределённая и имеет бесконечное множество решений, т.е. $rang\,A = rang\,B < n$.
3. Если $rang\,A < rang\,B$, то система несовместна и решений не имеет.

Основным аппаратом при исследовании совместности системы линейных уравнений и отыскании её решений служат *элементарные преобразования* строк расширенной матрицы. К ним относятся:

– вычёркивание нулевой строки;

– умножение всех элементов строки матрицы на число, не равное нулю;

– изменение порядка строк матрицы;

– прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на любое, не равное нулю, число.

С помощью элементарных преобразований строк расширенная (и одновременно основная) матрица системы может быть приведена к упрощённой форме. Система уравнений, соответствующая упрощённой расширенной матрице, называется *упрощённой*.

Для того, чтобы решить систему уравнений, можно придерживаться следующей схемы.

1. Расширенную матрицу системы с помощью элементарных преобразований строк приводим к упрощённой форме.

2. Проверяем совместность, пользуясь теоремой Кронекера-Капелли.

3. Решаем упрощённую систему уравнений, если она оказалась совместной.

4.3. Метод Гаусса

Поиск ранга матрицы удобно совместить с решением системы *методом Гаусса*, который обеспечивает последовательное исключение переменных и заключается в том, что с помощью элементарных преобразований СЛУ приводится к равносильной системе ступенчатого вида.

Если система имеет единственное решение, то ступенчатая система уравнений приведётся к треугольной, т.е. к такой, в которой последнее уравнение содержит одно неизвестное. Переход системы к равносильной треугольной называется *прямым ходом* метода Гаусса, а нахождение переменных из треугольной системы – *обратным ходом* метода Гаусса.

В случае неопределённой системы, допускающей бесконечное множество решений, треугольной системы не получается, так как последнее уравнение содержит более одного неизвестного.

Когда же система уравнений несовместна, то после приведения к ступенчатому виду она содержит хотя бы одно уравнение вида 0=1, т.е. уравнение, в котором все неизвестные имеют нулевые коэффициенты, а правая часть отлична от нуля. Такая система не имеет решений.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 4.1. С помощью элементарных преобразований вычислить ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Вычитая из третьей строки удвоенную первую, сокращая второй столбец на 2 и вычитая после этого из первого столбца утроенный второй, из третьего –второй и из четвёртого –удвоенный второй, последовательно получаем:

$$A\sim\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix},$$

где знак ~ указывает, что соединяемые им матрицы получаются одна из другой элементарными преобразованиями и, значит, имеют один и тот же ранг.

Прибавляя далее к третьей строке утроенную вторую, сокращая первый столбец на 2, прибавляя его к третьему, затем вычитая из четвёртого и, поменяв местами первые два столбца, получим:

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: ранг исходной матрицы равен 2.

Пример 4.2. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу, в которой вертикальная черта будет отделять правую часть равенства от левой (символизировать знак равенства). Для удобства обнуления элементов под главной диагональю (приведение СЛУ к ступенчатому виду) запишем коэффициенты второго уравнения в первой строке и выполним элементарные преобразования над расширенной матрицей системы линейных уравнений:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right),$$

здесь для обнуления элемента a_{21} первая строка умножалась на -2 и складывалась со второй строкой, результат записан во второй строке. Для обнуления элемента a_{31} первая строка умножалась на -3 и складывалась с третьей строкой, результат записан в третьей строке.

Приступим к обнулению элемента a_{32}, вычтем из элементов третьей строки соответствующие элементы второй строки, тогда:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right),$$

при этом нулевую строку в матрице нужно удалить, что и было сделано. В получившейся матрице максимальный размер определителя, отличного от нуля, имеет размер 2×2, т.е. ранг матрицы системы $rang\,A=2$ и ранг расширенной матрицы B, тоже равен 2. Тогда, согласно теореме Кронекера-Капелли, система уравнений совместна, но так как количество неизвестных n=4 больше ранга матрицы $(rang\,A = rang\,B = 2 < n = 4)$, система имеет бесконечное множество решений.

Оставим в левой части переменные x_1 и x_2, которые берём за базисные (определитель из коэффициентов при них отличен нуля, т.е. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$). Остальные свободные переменные x_3, x_4 переносим в правые части уравнений. В результате получим систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -6 + 2x_3 - 3x_4; \\ \quad -5x_2 = 17 - 5x_3 + 7x_4, \end{cases}$$

откуда $x_2 = -\dfrac{17}{5} + x_3 - \dfrac{7}{5}x_4$,

$$x_1 = -6 + 2x_3 - 3x_4 - 2\left(-\frac{17}{5} + x_3 - \frac{7}{5}x_4\right) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_4.$$

Придавая свободным переменным x_3 и x_4 произвольные значения $x_3 = t$ и $x_4 = u$, где $u, t \in R$, получим так называемое общее решение СЛУ:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{5} - \dfrac{1}{5}u; \\ x_2 = -\dfrac{17}{5} + t - \dfrac{7}{5}u; \\ x_3 = t; \\ x_4 = u. \end{cases}$$

Задавая свободным переменным x_3 и x_4 конкретные значения найдём *частные решения системы*. Если свободные переменные принимают значения, равные нулю, то полученное решение называется *базисным решением*: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{5}; \\ x_2 = -\dfrac{17}{5}; \\ x_3 = x_4 = 0. \end{cases}$

Базисных решений может быть несколько, всё зависит от выбора свободных переменных.

Пример 4.3. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса, предварительно исследовав её с помощью теоремы Кронекера–Капелли $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2; \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2; \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

Решение. Для того чтобы решить систему уравнений, исследуем расширенную матрицу, выполнив преобразования только между строками (тогда поиск ранга матрицы будет совмещаться с решением по методу Гаусса). Обнулим все элементы под a_{11} расширенной матрицы этой системы; для этого вычтем первую строку из второй и третьей, а утроенную первую строку из четвёртой, получим:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \end{array}\right).$$

Далее, прибавив утроенную третью строку ко второй и удвоенную третью к четвёртой, находим:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \end{array}\right).$$

После удаления повторяющейся четвёртой строки и смены местами второй и третьей строк была получена последняя матрица в преобразовании, из которой очевидно, что $rang\,A = rang\,B = 3$. Следовательно, исходная система совместна и является определённой, т.к. количество неизвестных равно рангу матрицы, то она имеет единственное решение. Вернёмся к системе уравнений: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2; \\ x_2 - 4x_3 = -4; \\ x_3 = 1. \end{cases}$

Решение этой системы можно получить при использовании обратного хода метода Гаусса. Покажем применение обратного хода:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Последняя расширенная матрица равносильна системе: $\begin{cases} x_1 = -1; \\ x_2 = 0; \\ x_3 = 1. \end{cases}$

Значит, единственным решением системы будет $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

Пример 4.4. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса, предварительно исследовав систему с помощью теоремы Кронекера–Капелли: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4; \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4; \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -8. \end{cases}$

Решение. Выписав расширенную матрицу этой системы, после элементарных преобразований получим:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 6 & 4 & -6 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

откуда $rang\,A = rang\,B = 2$, следовательно, система совместна. Однако количество неизвестных больше ранга матрицы, поэтому система $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0; \\ -3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 4, \end{cases}$ неопределённая и будет иметь бесконечное множество решений.

Для нахождения общего решения системы линейных уравнений назначим свободными переменными x_3 и x_4, тогда в матрице $\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 2 & -3 \end{array}\right)$ четвёртый и пятый столбцы отвечают соответственно за коэффициенты при x_3 и x_4. Согласно обратного хода метода

Гаусса, после очевидных преобразований получим:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right).$$

Общее решение системы запишется в виде $\begin{cases} x_1 = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}x_3 - x_4; \\ x_2 = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_3 + x_4. \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}x_3 - x_4; \\ x_2 = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_3 + x_4. \end{cases}$

Пример 4.5. Исследовать систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4; \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4; \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 6. \end{cases}$$

Решение. Выполним элементарные преобразования над расширенной матрицей системы. Вычтем первую строку из второй, третьей и четвёртой. Прибавим к третьей строке вторую и удвоенную вторую к четвёртой, получим:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 6 & 4 & -6 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \end{array}\right),$$

так как $rang\, A = 2$, а $rang\, B = 3$ –система несовместна, решений нет.

Ответ: система решений не имеет.

Пример 4.6. Решить СЛУ, выяснив предварительно вопрос о её совместности с помощью теоремы Кронекера-Капелли. В случае неопределённости системы найти её общее, базисное и частное решения: $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4; \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

Решение. Применяя алгоритм Гаусса, приводим расширенную матрицу к упрощённому виду. Для этого вычтем первую строку из третьей и утроенную первую из второй. Затем прибавим третью строку ко второй, вычеркнем нулевую второю строку, получим:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -7 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & -7 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -7 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Теперь разделим вторую строку на четыре и вычтем её из первой:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{4} & -\frac{7}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{4} & -\frac{7}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right).$$

Нетрудно видеть, что $rang\, A = rang\, B = 2$. Следовательно, система совместна. Так как ранг совместной системы меньше количества неизвестных, то система неопределённая и имеет бесконечное множество решений.

За базисные переменные примем x_1 и x_2, так как определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ из коэффициентов при этих неизвестных отличен от нуля. Свободными переменными служат x_3, x_4 и x_5. Переписав систему в виде: $\begin{cases} x_1 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 + x_5 = \frac{5}{4}; \\ x_2 - \frac{7}{4}x_3 - \frac{7}{4}x_4 = -\frac{1}{4}, \end{cases}$ выразим x_1 и x_2 через x_3, x_4 и x_5:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - x_5; \\ x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4. \end{cases}$$

Полагая $x_3 = u$, $x_4 = v$ и $x_5 = t$, получим общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}u - \frac{3}{4}v - t; \\ x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}u + \frac{7}{4}v; \\ x_3 = u, \quad x_4 = v, \quad x_5 = t. \end{cases}$$

Придавая u, v и t различные числовые значения, будем получать различные решения данной системы уравнений. Например:

базисное решение $\left(\frac{5}{4}; -\frac{1}{4}; 0; 0; 0\right)$, частное решение $\left(\frac{3}{4}; \frac{13}{4}; 1; 1; 0\right)$.

Ответ: общее решение $\begin{cases} x_1 = \dfrac{5}{4} + \dfrac{1}{4}u - \dfrac{3}{4}v - t; \\ x_2 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{7}{4}u + \dfrac{7}{4}v; \\ x_3 = u, \;\; x_4 = v, \;\; x_5 = t; \end{cases}$

базисное решение $\left(\dfrac{5}{4}; -\dfrac{1}{4}; 0; 0; 0 \right)$;

частное решение $\left(\dfrac{3}{4}; \dfrac{13}{4}; 1; 1; 0 \right)$.

Задания для самостоятельного решения

по теме « Метод Гаусса. Теорема Кронекера–Капелли »

Группа А

1.А. Вычислить ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; *б*) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 8 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$; *в*) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & -9 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: *а*) 3; *б*) 2; *в*) 2.

В задачах ***2.А–19.А*** решить системы линейных уравнений методом Гаусса, предварительно исследовав их с помощью теоремы Кронекера–Капелли.

2.*А*. $\begin{cases} x+y+z=36; \\ x+z-y=13; \\ y+z-x=7. \end{cases}$

Ответ: $r(A)=r(B)=n=3$,

$x=14{,}5$; $y=11{,}5$; $z=10$.

3.*А*. $\begin{cases} x+2y+z=4; \\ 3x+3z-5y=1; \\ 7y-z+2x=8. \end{cases}$

Ответ: $r(A)=r(B)=n=3$,

$x=1$; $y=1$; $z=1$.

4.*А*. $\begin{cases} 2x-4y+9z=28; \\ 7x-6z+3y=-1; \\ 7x+9y-9z=5. \end{cases}$

Ответ: $r(A)=r(B)=n=3$,

$x=2$; $y=3$; $z=4$.

5.*А*. $\begin{cases} 2x+y=5; \\ x+3z=16; \\ 5y-z=10. \end{cases}$

Ответ: $r(A)=r(B)=n=3$,

$x=1$; $y=3$; $z=5$.

6.*А*. $\begin{cases} 7x+2y+3z=15; \\ 5x+2z-3y=15; \\ 10x-11y+5z=36. \end{cases}$

Ответ: $r(A)=r(B)=n=3$,

$x=2$; $y=-1$; $z=1$.

7.*А*. $\begin{cases} x-2y-z+5=0; \\ 2x+y-z+3=0; \\ 2y+3z-x=9. \end{cases}$

Ответ: $r(A)=r(B)=n=3$,

$x=-1$; $y=1$; $z=2$.

8.*А*. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=3; \\ 3x_1-3x_2+6x_3=9; \\ 4x_3-2x_2+2x_1=6. \end{cases}$

Ответ: $r(A)=r(B)=1<n=3$,

базисное решение $(3;\ 0;\ 0)$.

9.*А*. $\begin{cases} x+y+z=0; \\ 2x+z+3y=1; \\ 2y+x=1. \end{cases}$

Ответ: $r(A)=r(B)=2<n=3$,

базисное решение $(-1;\ 1;\ 0)$.

10.A. $\begin{cases} 3x_1+5x_2+4x_3+x_4=2; \\ 4x_1+9x_2+3x_3+6x_4=5; \\ 2x_1+7x_2-x_3+8x_4=5; \\ x_1+4x_2-x_3+5x_4=3; \\ 6x_1+7x_2+11x_3-4x_4=1. \end{cases}$

Ответ: $r(A)=r(B)=2<n=4$,

базисное решение $(-1;1;0;0)$.

11.A. $\begin{cases} x-2y+z-t=0; \\ 2x+3y-z-4t=11; \\ 5x-4y-3z+2t=4; \\ 2y+3z-x-4=3t. \end{cases}$

Ответ: $r(A)=r(B)=n=4$,

$x=3$; $y=2$; $z=1$, $t=0$.

12.A $\begin{cases} -4x_1+7x_2+5x_3=-2; \\ 3x_1-x_2+2x_3=3; \\ 9x_1+8x_2+x_3=-7; \\ 5x_1+15x_2+6x_3=-9; \\ -x_1+6x_2+7x_3=1. \end{cases}$

Ответ: $r(A)=r(B)=n=3$,

$x_1=0$; $x_2=-1$; $x_3=1$.

13.A. $\begin{cases} 7x_1+5x_2-4x_3+6x_4=2; \\ x_1-5x_2+3x_3+6x_4=5; \\ 2x_1+x_2-x_3+3x_4=5; \\ x_1+4x_2-x_3+5x_4=9; \\ 6x_1+x_2+x_3-x_4=7. \end{cases}$

Ответ: $r(A)=4$, $r(B)=5$,

система несовместна.

14.A. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+4x_4=6; \\ 4x_1+4x_3+9x_4=17; \\ 3x_1+x_2+2x_3+5x_4=11; \\ x_1+3x_2-2x_3-3x_4=-1. \end{cases}$

Ответ: $r(A)=r(B)=2<n=4$,

базисное решение $\left(\frac{17}{4};-\frac{7}{4};0;0\right)$.

15.A. $\begin{cases} x_1+5x_2-2x_3-3x_4=1; \\ 7x_1+2x_2-3x_3-4x_4=2; \\ x_1+x_2+x_3+x_4=5; \\ 2x_1+3x_3+2x_3-3x_4=4; \\ x_1-x_2-x_3-x_4=-2. \end{cases}$

Ответ: $r(A)=4$, $r(B)=5$,

система несовместна.

16.A.

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 0; \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_5 = 4; \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 2. \end{cases}$$

Ответ: $r(A) = r(B) = 3 < n = 5$,

базисное решение $(1;1;1;\ 0;\ 0)$.

17.A.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 3; \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$$

Ответ: $r(A) = r(B) = 2 < n = 4$,

базисное решение $(1;\ 0;\ 0;\ 0)$.

18.A.

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_5 = 0; \\ -2x_1 + 7x_2 + 5x_3 + x_4 + 3x_5 = -2; \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 8x_4 = -10. \end{cases}$$

Ответ: $r(A) = r(B) = 3 < n = 5$,

базисное решение $(4;1;\ 0;\ -1;\ 0)$.

19.A.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4; \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $r(A) = r(B) = 2 < n = 5$,

базис. решение $\left(\frac{5}{4};-\frac{1}{4};0;0;0\right)$.

Задания для самостоятельного решения

по теме « Метод Гаусса. Теорема Кронекера–Капелли »

Группа B

1.B. Вычислить ранг матрицы:

$$а)\begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}; \quad б)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}; \quad в)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 5 & 8 \\ 5 & 3 & 10 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: *а*) 3; *б*) 4; *в*) 2.

В задачах ***2.B–17.B*** исследовать системы линейных уравнений с помощью теоремы Кронекера-Капелли, если возможно, найти решение СЛУ методом Гаусса.

2.B. $\begin{cases} x+2y=10; \\ 3x+2y+z=23; \\ y+2z=13. \end{cases}$

Ответ: $r(A)=r(B)=n=3$,

$x=4$; $y=3$; $z=5$.

3.B. $\begin{cases} 3x+2y+z=3; \\ 5x-2y-2z=3; \\ x+y-z=-2. \end{cases}$

Ответ: $r(A)=r(B)=n=3$,

$x=1$; $y=-1$; $z=2$.

4.B. $\begin{cases} x-4y+5z=5; \\ 2x-8y+3z=5; \\ -x+4y+2z=7, \end{cases}$

Ответ: $r(A)=2$, $r(B)=3$,

система несовместна.

5.B. $\begin{cases} 10x_1-7x_2=7; \\ -3x_1+6x_3+2x_2=4; \\ 5x_3-x_2+5x_1=6. \end{cases}$

Ответ: $r(A)=r(B)=n=3$,

$x_1=0$; $x_2=-1$; $x_3=1$.

6.B. $\begin{cases} 2x-3y+z=-7; \\ x+4y+2z=-1; \\ x-4y=-5. \end{cases}$

Ответ: $r(A)=r(B)=n=3$,

$x=-1$; $y=1$; $z=-2$.

7.B. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+7x_3+11x_4=8; \\ x_1+2x_2+4x_3+7x_4=4; \\ 5x_1+10x_3+5x_4=20. \end{cases}$

Ответ: $r(A)=r(B)=2<n=4$,

базисное решение $(4;\ 0;\ 0;\ 0)$.

8.B. $\begin{cases} y+2z=0; \\ -x-2z=1; \\ y-x=1. \end{cases}$

Ответ: $r(A)=r(B)=2<n=3$,

базисное решение $(-1;\ 0;\ 0)$.

9.B. $\begin{cases} x_1-5x_2-6x_3+11x_4=-9; \\ 5x_1+x_2-4x_3+3x_4=7; \\ x_1+8x_2+7x_3-15x_4=17. \end{cases}$

Ответ: $r(A)=2=r(B)=2<n=4$,

базисное решение $(1;\ 2;\ 0;\ 0)$.

10.В. $\begin{cases} x_1 - 22x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -13; \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 9; \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 16; \\ -5x_1 + 10x_2 - x_3 = 11. \end{cases}$

Ответ: $r(A) = 3,\ r(B) = 4$, система несовместна.

11.В. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2; \\ x_1 - x_3 = 1; \\ 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 2; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$

Ответ: $r(A) = 3,\ r(B) = 4$, система несовместна.

12.В. $\begin{cases} x_1 - 3x_3 - 4x_4 = -13; \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 9; \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 16; \\ -5x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 11. \end{cases}$

Ответ: $r(A) = r(B) = n = 4$, $x_1 = 2;\ x_2 = 1;\ x_3 = 1;\ x_4 = 3$.

13.В. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 8; \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 3; \\ -x_1 + 2x_3 + x_4 = 4; \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 5. \end{cases}$

Ответ: $r(A) = r(B) = n = 4$,

$x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 3;\ x_4 = -1$.

14.В. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 + 3x_3 = 3; \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5; \\ 5x_1 + 4x_2 + 13x_3 + 6x_4 = 13. \end{cases}$

Ответ: $r(A) = r(B) = 3 < n = 4$, базисное решение $(1;\ 2;\ 0;\ 0)$.

15.В. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2; \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases}$

Ответ: $r(A) = r(B) = 3 < n = 5$, базисное решение $(2;\ -1;\ 3;\ 0;\ 0)$.

16.В. $\begin{cases} x + 2y + z = 2; \\ 5y + 3z - 7 = x; \\ 8x + y + 9 = 2z; \\ 2x + 7y + 4z = 9. \end{cases}$

Ответ: $r(A) = r(B) = n = 3$, $x_1 = 0;\ x_2 = -1;\ x_3 = 4$.

17.В. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 6 = 0; \\ 13x_1 - x_2 + x_3 = -3; \\ 3x_1 + x_3 = 0; \\ 5x_2 - x_3 = 2; \\ 6x_1 - x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

Ответ: $r(A) = 3,\ r(B) = 4$, система

несовместна.

Тренировочный тест.

№ пп	Условие	Ответы
1	Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix}$	**А**. b^2-1 **Б**. 1-b^2 **В**. b^2 **Г**. b^2+1 **Д**. 0
2	Найти сумму элементов матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$	**А**. 6 **Б.** 3 **В**. -3 **Г**. -1 **Д**. -9
3	Найти $(A-B)\cdot C$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.	**А**. $\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ -10 & 11 \end{pmatrix}$ **Б**. $\begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 12 & 11 \end{pmatrix}$ **В**. $\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$ **Г**. $\begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 19 & 11 \end{pmatrix}$ **Д**. $\begin{pmatrix} 12 & 10 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$
4	Решить уравнение: $\begin{vmatrix} x-2 & 3 & x \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$	**А**. 2 **Б**. 1 **В**. 3 **Г**. –2 **Д**. –3
5	Найти сумму элементов обратной матрицы: $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.	**А**. 5/7 **Б**. –6/7 **В**.3/7 **Г**. –4/7 **Д**. –2/7

6	Решить неравенство: $\begin{vmatrix} x-5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \le 2$	**А.** $x \in (-\infty; 11]$ **Б.** $x \in (-\infty; -13]$ **В.** $x \in (-\infty; 13]$ **Г.** $x \in [13; \infty)$ **Д.** $x \in (-\infty; 13)$
7	Решить систему с помощью обратной матрицы: $\begin{cases} 5x+3y=7; \\ 4x+6y=2. \end{cases}$	**А.** $(-1; 2)$ **Б.** $(1; -2)$ **В.** $(-1; -2)$ **Г.** решений нет **Д.** $(2; -1)$
8	Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	**А.** *rang*=2 **Б.** *rang*=3 **В.** *rang*=0 **Г.** *rang*=1 **Д.** *rang*=4
9	Решить СЛУ методом Краме-ра: $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=2; \\ x_1+3x_2-x_3=-2; \\ 3x_1+4x_2+3x_3=0. \end{cases}$	**А.** $(3; -1; -2)$ **Б.** $(-1; 0; 1)$ **В.** $(-1; 4; 2)$ **Г.** $(2; -1; -2)$ **Д.** $(2; -4; -2)$
10	Решить СЛУ методом Гаусса: $\begin{cases} 2x+3y+2z=9; \\ x+2y-3z=14; \\ 3x+4y+z=16. \end{cases}$	**А.** $(2; -3; 2)$ **Б.** $(-1; 3; -2)$ **В.** $(1; 3; 2)$ **Г.** $(-1; 1; -2)$ **Д.** $(2; 3; -2)$

Ответы: 1Б, 2Д, 3Г, 4Д, 5А, 6В, 7Д, 8А, 9Б, 10Д.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1. М.: Мир и образование, Астрель, Оникс, 2012. – 368 с.
2. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. М.: Лань, 2009. – 736 с.
3. Гурский Е.И. Руководство к решению задач по высшей математике: В 1 ч. / Е.И. Гурский, В.П. Домашов, В.К. Кравцов, А.п. Сильванович; Под ред. Е.И. Гурского. – Мн.: Высш. шк., 1990 – 350 с.
4. Журбенко Л.Н. Математика в примерах и задачах. / Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова, Н.В. Никонова, С.Н. Нуриева, О.М. Дегтярева. – М.: ИНФРА-М, 2009. – 373 с.
5. Лунгу К.Н. Высшая математика. Руководство к решению задач. Ч.1 / К.Н. Лунгу, Е.В. Макаров. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 213 с.
6. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике, 1 курс / К.Н. Лунгу. – 7-е изд – М.: Айрис-пресс, 2008. – 578 с. – (Высшее образование.)
7. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – 4-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2006. – 303 с. – (Высшее образование.)

ОГЛАВЛЕНИЕ

«Матрицы и определители»

В авторской редакции

Подписано в печать 00.00.2014
Формат 60 х 84 1/16. Бумага офсетная.
Усл. п. л. 3,65. Уч.-изд. л. 3,58
Тираж 100 экз.
Рег. №
Заказ №

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
443100. г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
Главный корпус.

Отпечатано в типографии
Самарского государственного технического университета
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Корпус №8