

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
УЛЬЯНОВСКОЕ ВЫСШЕЕ АВИАЦИОННОЕ УЧИЛИЩЕ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ (ИНСТИТУТ)

Л.И. ПОЛЕНИЩЕНКО
С.П. НИКОНОВА

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ
ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

2-е издание, исправленное и дополненное



Ульяновск 2011

Поленищенко, Л. И. Сборник задач и упражнений по линейной алгебре : учеб. пособие / Л. И. Поленищенко, С. П. Никонова. – 2-е изд., испр. и доп. – Ульяновск : УВАУ ГА(И), 2011. – 79 с.

Составлено в соответствии с программой курса математики и высшей математики для УВАУ ГА(И). Пособие состоит из восьми глав: в первых семи главах содержатся необходимые теоретические сведения и формулы, даны решения типовых задач с необходимыми методическими рекомендациями, помещены упражнения для самостоятельного решения, сопровождающиеся ответами. В восьмой главе пособия приведены варианты проверочных заданий.

Предназначено для аудиторной и самостоятельной работы курсантов первого курса всех специализаций.

Печатается по решению Редсовета училища.

© Поленищенко Л.И., Лебедева Н.А., 1997.

© Ульяновск, УВАУ ГА, 1997.

© Ульяновское высшее авиационное училище
гражданской авиации (институт),
с исправлениями и дополнениями, 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
1. Определители.....	5
2. Системы линейных уравнений. Правило Крамера	16
3. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса	20
4. Матрицы, операции над ними. Обратная матрица	28
5. Матричная запись системы линейных уравнений. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.....	36
6. Ранг матрицы. Критерий совместности системы линейных уравнений	40
7. Линейное пространство. Базис. размерность. Понятие Евклидова пространства	47
8. Варианты заданий для самостоятельной работы	52
Ответы	74
Библиографический список.....	78

ВВЕДЕНИЕ

Изучение дисциплины «Математика» в УВАУ ГА(И) начинается с рассмотрения основ линейной алгебры, включающих в себя элементы теории матриц и определителей, а также различные методы решения систем линейных уравнений.

Простейшие системы линейных уравнений умели решать еще вавилонские и древнегреческие математики. Интенсивная разработка общей теории систем таких уравнений началась с построения теории определителей, к которой непосредственное отношение имели швейцарский математик Г. Крамер (1704–1752) и французский ученый П.-С. Лаплас (1749–1827). Существенный вклад в развитие указанного направления линейной алгебры, включающего в себя также теорию матриц, внесли немецкие математики К.-Ф. Гаусс (1777–1855) и Л. Кронекер (1823–1891), итальянский математик А. Капелли (1855–1910), французский математик К.-Э. Жордан (1838–1922). Имена этих ученых носят важные правила и теоремы, описывающие и обосновывающие методику решения всевозможных систем линейных уравнений.

По разнообразию и значительности приложений как в математике, так и в экономике, механике, физике и технических науках линейная алгебра остается первой среди многочисленных ветвей алгебры. В решении ряда практических задач, связанных с эксплуатацией авиационной техники, также возникает необходимость решения систем алгебраических уравнений. Например, при оценке прочностей деталей летательных аппаратов, где по реальному состоянию объекта производится прочностный расчет, необходимо совместно решить огромное число уравнений (для современных изделий порядка 55000 уравнений). Естественно, что эти громоздкие вычисления выполняются в настоящее время с помощью современных пакетов компьютерных программ, теоретической основой которых являются обычные методы линейной алгебры.

Настоящий сборник содержит достаточное количество упражнений для выработки навыков решения стандартных задач линейной алгебры. Каждая глава начинается с краткого введения, состоящего из основных теоретических положений рассматриваемого раздела и подробного решения соответствующих типовых задач. Указываются также задачи, способствующие выявлению взаимной связи понятий линейной алгебры и объектов, изучаемых различными направлениями геометрии.

1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Матрицей размеров $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел (элементов матрицы), состоящая из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } A = (a_{ij}),$$

где $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Через a_{ij} обозначается элемент матрицы, стоящий на пересечении строки с номером i и столбца с номером j . В этой главе мы будем рассматривать только *квадратные* матрицы n -го порядка, т. е. такие, у которых число строк равно числу столбцов ($m = n$). Важной характеристикой квадратной матрицы является ее определитель.

Определителем квадратной матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

называется число, обозначаемое $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ и определяемое по правилу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad \boxed{1.1}$$

По-другому определитель можно обозначить следующим образом:

$$|A|, \Delta, \det A, \det(a_{ij}).$$

Пример 1. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}$.

В соответствии с формулой $\boxed{1.1}$ получаем:

$$\Delta = 4 \cdot (-6) - (-5) \cdot 3 = -24 + 15 = -9.$$

Пример 2. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$.

Сначала найдем определители:

$$\begin{vmatrix} x^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x^2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = x^2 - 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - 4 \cdot 2 = 3.$$

Данное уравнение принимает вид: $x^2 - 1 = 3$ или $x^2 = 4$, откуда получаем, что $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

Определителем квадратной матрицы третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется число, определяемое по правилу: $\det A =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}. \quad \boxed{1.2}$$

Правило вычисления определителя третьего порядка можно представить схематично: в разложении следует взять со знаком «плюс» произведения тех троек элементов, которые соединены отрезками прямых на рис. 1а, и со знаком «минус» – произведения элементов, соединенных отрезками на рис. 1б (*правило треугольников*).

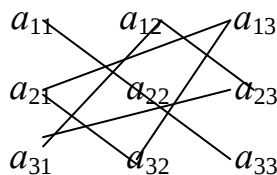


Рис. 1а

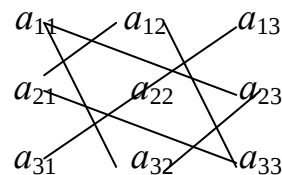


Рис. 1б

Пример 3. Вычислить определитель третьего порядка $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 8 \\ 7 & -6 & 2 \end{vmatrix}$.

Применяя формулу $\boxed{1.2}$, получаем:

$$\begin{aligned} \Delta &= 3 \cdot (-4) \cdot 2 + (-1) \cdot 8 \cdot 7 + 5 \cdot (-6) \cdot 1 - 1 \cdot (-4) \cdot 7 - 8 \cdot (-6) \cdot 3 - 5 \cdot (-1) \cdot 2 = \\ &= -24 - 56 - 30 + 28 + 144 + 10 = 72. \end{aligned}$$

Минором элемента a_{ij} называется определитель M_{ij} матрицы, полученной из данной при вычеркивании строки с номером i и столбца с номером j .

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется его минор, взятый со знаком, определяемым выражением $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \quad \boxed{1.3}$$

Пример 4. Найти миноры и алгебраические дополнения элементов третьего столбца матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

Элементами третьего столбца являются $a_{13} = 3$, $a_{23} = 5$, $a_{33} = 7$.

По определению минора получаем:

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 32 - 6 = 26,$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 12 = -4,$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 8 = -7.$$

По формуле $\boxed{1.3}$ находим алгебраические дополнения:

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = 26,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -(-4) = 4,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = -7.$$

Рассмотрим основные свойства определителей.

Свойство 1. Определитель не изменится при замене всех его строк соответствующими по номеру столбцами:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Свойство 2. При перестановке двух столбцов (строк) определитель изменит знак на противоположный:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Свойство 3. Общий множитель всех элементов столбца (строки) определителя можно выносить за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Свойство 4. Определитель равен нулю, если все элементы некоторого столбца (строки) равны нулю.

Свойство 5. Определитель равен нулю, если он содержит два одинаковых столбца (строки):

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 6. Если соответствующие элементы двух столбцов (строк) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_1 & ka_1 & c_1 \\ a_2 & ka_2 & c_2 \\ a_3 & ka_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 7. Если каждый элемент какого-то конкретного столбца (строки) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то этот определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, из которых один в указанном столбце (строке) имеет первые из упомянутых слагаемых, а другой – вторые; элементы же других столбцов (строк) у всех трех определителей одни и те же:

$$\begin{vmatrix} a'_1 + a''_1 & b_1 & c_1 \\ a'_2 + a''_2 & b_2 & c_2 \\ a'_3 + a''_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_1 & b_1 & c_1 \\ a'_2 & b_2 & c_2 \\ a'_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_1 & b_1 & c_1 \\ a''_2 & b_2 & c_2 \\ a''_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Свойство 8. Определитель не изменится, если к элементам некоторого его столбца (строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца (строки), предварительно умноженные на одно и то же число:

$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Свойство 9. Определитель равен сумме произведений элементов любой конкретной его строки (столбца) на их собственные алгебраические дополнения.

Свойство 10. Сумма произведений элементов некоторой строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.

Указанные свойства позволяют упрощать вычисление определителей.

Пример 5. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -9 \\ 2 & 6 & -9 \\ 3 & 5 & -8 \end{pmatrix}$, разло-

жив его по элементам второй строки.

Применяя свойство 9, получим:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \\ &= 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 8 & -9 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & -9 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} + (-9) \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= -2 \cdot (-64 - (-45)) + 6 \cdot (-32 - (-27)) + 9 \cdot (20 - 24) = \\ &= -2 \cdot (-19) + 6 \cdot (-5) + 9 \cdot (-4) = 38 - 30 - 36 = -28. \end{aligned}$$

Пример 6. Используя свойства, вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 2 & 6 & -9 \\ 3 & 5 & -8 \end{vmatrix}$.

Вычисление определителя будет наиболее рациональным, если в ходе преобразований в каком-либо столбце или в какой-то строке получится максимальное количество нулей. Применим к данному определителю свойство 8: во-первых, прибавим ко второй строке первую, умноженную на (-2) , а во-вторых, прибавим к третьей строке первую, умноженную на (-3) ; при этом первая строка остается неизменной.

Получаем:
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 2 & 6 & -9 \\ 3 & 5 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 0 & -8 & -1 \\ 3 & 5 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 0 & -8 & -1 \\ 0 & -16 & 4 \end{vmatrix}.$$

Вычислим преобразованный определитель, разложив его по элементам первого столбца: $\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -8 & -1 \\ -16 & 4 \end{vmatrix} = -32 - 16 = -48.$

Пример 7. Предварительно упростив, вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Прибавим к элементам второго столбца соответствующие элементы третьего, а затем разложим полученный определитель по второму столбцу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7.$$

Рассмотрим квадратную матрицу n -го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определителем n -го порядка называется число, равное сумме произведений элементов первой строки на их алгебраические дополнения:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \dots + a_{1n}A_{1n}.$$

Определители n -го порядка ($n > 3$) обладают теми же свойствами, что и определители второго и третьего порядков, в том числе, такие определители можно вычислять, раскладывая их по элементам любой строки или столбца.

Пример 8. Вычислить определитель четвертого порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 15 \\ 6 & -8 & 7 & 9 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 15 \\ 6 & -8 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 15 \\ -8 & 7 & 9 \end{vmatrix} - 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 15 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 15 \\ 6 & -8 & 9 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 6 & -8 & 7 \end{vmatrix}.$$

Вычислив определители третьего порядка, находим:

$$\Delta = -147 + 98 - 98 + 98 = -49.$$

Пример 9. Используя свойства, вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 15 \\ 6 & -8 & 7 & 9 \end{vmatrix}.$$

Применяя указанные выше свойства определителей, находим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 15 \\ 6 & -8 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 6 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 6 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 6 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & -12 & -5 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -8 & -2 \\ -12 & -5 \end{vmatrix} = -(40 - 24) = -16.$$

Второй определитель четвертого порядка получен из первого определителя умножением элементов его первого столбца на (-1) и сложением с соответствующими элементами поочередно второго, третьего и четвертого столбцов, после чего второй определитель разложен по первой строке.

Найденный определитель третьего порядка преобразован следующим образом: первая строка умножается на (-1) и складывается со второй строкой, затем первая строка умножается на (-2) и складывается с третьей, после чего преобразованный определитель раскрывается по элементам первого столбца.

УПРАЖНЕНИЯ

1.1. Вычислить определители второго порядка:

$$\begin{aligned}
& 1) \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}; 2) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}; 3) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}; 4) \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -4 & -5 \end{vmatrix}; 5) \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}; 6) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \\
& 7) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; 8) \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}; 9) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}; 10) \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; 11) \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}; 12) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}; \\
& 13) \begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; 14) \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}; 15) \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}; 16) \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}; 17) \begin{vmatrix} 29 & 17 \\ 28 & 18 \end{vmatrix}; \\
& 18) \begin{vmatrix} 275 & 175 \\ 276 & 176 \end{vmatrix}; 19) \begin{vmatrix} 348 & 349 \\ 248 & 249 \end{vmatrix}; 20) \begin{vmatrix} 5731 & 4731 \\ 5732 & 4732 \end{vmatrix}; 21) \begin{vmatrix} 6826 & 6827 \\ 5826 & 5827 \end{vmatrix}; \\
& 22) \begin{vmatrix} 1115 & 127 \\ 1115 & 128 \end{vmatrix}; 23) \begin{vmatrix} b & -4 \\ b^3 & b^2 \end{vmatrix}; 24) \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}; \\
& 25) \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}; 26) \begin{vmatrix} \sqrt{a} & a \\ -5 & \sqrt{a} \end{vmatrix}; 27) \begin{vmatrix} \frac{x}{1+x} & \frac{2x+1}{1+x} \\ \frac{-1}{1+x} & \frac{x}{1+x} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

1.2. Решить уравнения:

$$\begin{aligned}
& 1) \begin{vmatrix} 2 & 3x \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 0; 2) \begin{vmatrix} x^2 & x \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}; 3) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x^2 & 3x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; \\
& 4) \begin{vmatrix} x^2 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}; 5) \begin{vmatrix} x^3 & -1 \\ x^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}; 6) \begin{vmatrix} x^3 & -x^2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -x \\ 9 & 18 \end{vmatrix}; \\
& 7) \begin{vmatrix} x^3 & 5 \\ x^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -x \\ 1 & -5 \end{vmatrix}; 8) \begin{vmatrix} x^4 & 2 \\ x^3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -x^2 \\ 1 & -x \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

1.3. Вычислить определители третьего порядка:

$$1) \begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix}; 2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 9 & 8 & 7 \end{vmatrix}; 3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 0 & 7 \end{vmatrix}; 4) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}; 5) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix};$$

$$\begin{aligned}
& 6) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & 5 & -8 \end{vmatrix}; 7) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 6 & -8 \end{vmatrix}; 8) \begin{vmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 1 & 6 & -8 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix}; 9) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}; 10) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}; \\
& 11) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 15 & 5 \\ 6 & 9 & 7 \end{vmatrix}; 12) \begin{vmatrix} 9 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}; 13) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}; 14) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix}; 15) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \\
& 16) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; 17) \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}; 18) \begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & -1 & -x \end{vmatrix}; 19) \begin{vmatrix} 1 & c & a+b \\ 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

1.4. Найти миноры и алгебраические дополнения элементов первой строки и первого столбца следующих матриц:

$$1) \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 8 & -3 & 2 \\ 1 & -6 & 9 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}; 4) \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \\ 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.5. Вычислить определители, разложив их:

$$\begin{aligned}
& 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} - \text{по элементам первой строки;} \\
& 2) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 8 & 9 & 7 \end{vmatrix} - \text{по элементам третьей строки;} \\
& 3) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} - \text{по элементам второго столбца;} \\
& 4) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} - \text{по элементам третьего столбца;} \\
& 5) \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \text{по элементам второго столбца;}
\end{aligned}$$

$$6) \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix} \text{ – по элементам третьей строки;}$$

$$7) \begin{vmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -9 \end{vmatrix} \text{ – по элементам первого столбца;}$$

$$8) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \text{ – по элементам второй строки;}$$

$$9) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ – по элементам первой строки.}$$

1.6. Вычислить определители, предварительно преобразовав их:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & -a \end{vmatrix}; 2) \begin{vmatrix} 9 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}; 3) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}; 4) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{vmatrix};$$

$$5) \begin{vmatrix} 58 & 63 & 59 \\ 69 & 73 & 71 \\ 77 & 81 & 79 \end{vmatrix}; 6) \begin{vmatrix} 46 & 40 & 30 \\ 57 & 54 & 55 \\ 68 & 65 & 66 \end{vmatrix}; 7) \begin{vmatrix} 251 & 125 & 126 \\ 363 & 181 & 182 \\ 574 & 288 & 289 \end{vmatrix}.$$

1.7. Проверить справедливость следующих равенств:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}; 2) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 15 \\ 6 & -8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 6 & -8 & 7 \end{vmatrix}.$$

1.8. Вычислить определители четвертого порядка:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}; 2) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 8 & 1 & 4 \end{vmatrix}; 3) \begin{vmatrix} 2 & -2 & 8 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\begin{aligned}
 &4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}; 5) \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & -1 \\ 8 & 6 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 9 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}; 6) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 9 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}; 7) \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}; \\
 &8) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}; 9) \begin{vmatrix} 6 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}; 10) \begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

1.9. Вычислить определители пятого порядка:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}; 2) \begin{vmatrix} 2 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

1.10. При каком k определитель $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ k & 4 & 2 \end{vmatrix}$ равен нулю?

2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ПРАВИЛО КРАМЕРА

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида

[illegible]

где числа $a_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ называются *коэффициентами* системы, числа b_i – *свободными членами*.

Решением системы 2.1 *называется совокупность* n *значений неизвестных* $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n$, *при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства.*

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad [2.2]$$

Составим определители: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ – определитель системы,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

при этом заметим, что определитель Δ_i ($i=1,2,3$) получается из определителя системы Δ путем замены столбца коэффициентов при x_i столбцом из свободных членов.

ТЕОРЕМА. Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \quad (2.3)$$

Формулы (2.3) называются *формулами Крамера*.

Метод Крамера обобщается для системы n линейных уравнений с n неизвестными. Если $\Delta \neq 0$, то

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.4)$$

Пример 1. Решить системы уравнений методом Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 7, \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 7, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases}$$

а) Вычислим определители: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - (-1) = 7 \neq 0$,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 7 = 7, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 0 = 14.$$

По формулам Крамера получим $x_1 = \frac{7}{7} = 1$, $x_2 = \frac{14}{7} = 2$.

Решение системы: (1; 2).

б) Определитель системы равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 7 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 2 = -6.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то данная система имеет единственное решение.

Вычислим определители Δ_i ($i=1,2,3$).

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 7 & -3 & 7 \\ 6 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -18, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 7 \\ 3 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -12, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 7 \\ 3 & -4 & 6 \end{vmatrix} = -6.$$

Применим формулы $\boxed{2.3}$. $x_1 = \frac{-18}{-6} = 3$, $x_2 = \frac{-12}{-6} = 2$, $x_3 = \frac{-6}{-6} = 1$.

Проверка. Убедимся, что найденное решение удовлетворяет каждому уравнению системы. Подставим значения $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, в данную систему:

$$\begin{aligned} 3 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 &= 2 \Rightarrow 2 = 2, \\ 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 7 \cdot 1 &= 7 \Rightarrow 7 = 7, \\ 3 \cdot 3 - 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 &= 6 \Rightarrow 6 = 6. \end{aligned}$$

Решение системы: (3; 2; 1).

УПРАЖНЕНИЯ

2.1. Решить системы линейных уравнений методом Крамера.

$$1) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ 7x_1 + 6x_2 = 8. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 8x_1 - x_2 = 5, \\ 9x_1 - 2x_2 = 3. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 7x_1 + 3x_2 = 1, \\ 9x_1 + 5x_2 = 7. \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = -7, \\ 4x_1 + 3x_2 = -10. \end{cases} \quad 5) \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 7, \\ 4x_1 + 3x_2 = 1. \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 3, \\ 7x_1 + 6x_2 = 5. \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 12, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 14. \end{cases} \quad 8) \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 5, \\ 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases} \quad 10) \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4, \\ 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3, \\ 9x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases} \quad 12) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0, \\ 2x_1 + 8x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases} \quad 14) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 14, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 7. \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 4, \\ 2x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 9x_4 = 10, \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 - 8x_4 = 2. \end{cases} \quad 16) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 + 3x_4 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 7, \\ 5x_1 - 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 3. \end{cases} \quad 18) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 8x_4 = -1, \\ 4x_1 + 9x_2 + 2x_3 + 12x_4 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ГАУССА

Метод Гаусса позволяет ответить на вопросы о совместности или несовместности, определенности или неопределенности системы линейных уравнений, а также отыскать все решения совместной системы.

В основе метода лежит идея *последовательного исключения неизвестных* с помощью подстановок, суть которой состоит в приведении данной системы к другой, равносильной ей, но более простой системе. Это приведение одной системы к другой осуществляется путем элементарных преобразований, которые производятся над уравнениями системы или, что удобнее, над строками ее расширенной матрицы, т.к. элементарному преобразованию системы линейных уравнений соответствует одноименное элементарное преобразование строк ее расширенной матрицы.

Элементарными преобразованиями системы линейных уравнений (матрицы) называются следующие действия:

- *перестановка* двух уравнений (строк);
- *умножение* обеих частей уравнения (элементов строки) на отличное от нуля действительное число;
- *прибавление* к обеим частям какого-либо уравнения (к элементам строки) соответствующих частей другого уравнения (элементов другой строки), умноженных на одно и то же действительное число;
- *вычеркивание* уравнения, у которого обе части тождественно равны нулю (нулевой строки матрицы).

Рассмотрим алгоритм применения метода Гаусса.

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными

[illegible]

Предположим, что $a_{11} \neq 0$. Если это не так, то, изменив нумерацию уравнений, запишем первым то, в котором коэффициент при неизвестной x_1 отличен от нуля.

Умножаем первое уравнение системы почленно на число $\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$ и прибавляем ко второму. Вместо второго получаем уравнение, не содержащее неизвестной x_1 .

Умножая первое уравнение почленно на число $\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)$ и прибавляя к третьему, получаем уравнение, в котором коэффициент при x_1 также равен нулю.

Аналогично исключаем неизвестную x_1 из всех остальных уравнений, в результате чего получим эквивалентную исходной систему уравнений:

[illegible]

где $a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot a_{1j}$, $b'_i = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot b_1$ – новые коэффициенты и свободные члены системы ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$).

Предполагая, что $a'_{22} \neq 0$, и оставляя неизменными первые два уравнения системы, применим к каждому из остальных уравнений аналогичные предыдущим преобразования для того, чтобы коэффициент при неизвестной x_2 оказался равным нулю, и продолжим подобные преобразования далее относительно оставшихся неизвестных.

После конечного числа шагов т.н. *прямого хода метода Гаусса* получим одну из следующих систем, указанных ниже (коэффициенты в них переобозначены).

[illegible]

где $c_{ij} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

Такая система имеет единственное решение. Значение x_n находим из последнего уравнения ($x_n = d_n/c_{nn}$), значение x_{n-1} – из предпоследнего и т.д. (обратный ход метода Гаусса).

[illegible]

здесь $k < n$. Эта система имеет бесконечное множество решений. Из последнего уравнения можно выразить одну из неизвестных (например, x_k) через остальные $(n - k)$ неизвестных, входящих в это уравнение. Из предпоследнего уравнения определяется x_{k-1} , из первого — x_1 . При этом неизвестные $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ называются *свободными*, а неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_k$ — *базисными*. Какое-нибудь частное решение можно получить, если свободным неизвестным $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ придать конкретные значения.

[illegible]

где $k \leq n$, $d_k \neq 0$. Такая система несовместна, поскольку никакие значения неизвестных не могут удовлетворять ее последнему уравнению.

Таким образом, суть метода Гаусса состоит в том, что с помощью элементарных преобразований система приводится к *ступенчатому виду*, откуда легко найти решения. Вывод о количестве решений можно сделать по виду последней строки. При этом возможны три случая.

Система имеет *единственное решение*, если последнее уравнение имеет вид $ax_n = b$, где $a \neq 0$.

Система имеет *бесконечное множество решений*, если последнее уравнение содержит больше одной неизвестной, тогда часть неизвестных являются свободными.

Система *несовместна*, если последнее уравнение имеет вид $0 \cdot x_n = b$, где $b \neq 0$.

Пример 1. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 3, \\ 3x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 9. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 5 \\ 2 & -7 & 2 & 3 \\ 3 & -8 & 4 & 9 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 4 & -5 & -6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 11 & 22 \end{array} \right).$$

Вторая матрица получена из первой в результате следующих действий:

- 1) вторая строка сложена с первой, умноженной на (-2) ;
- 2) третья строка сложена с первой, умноженной на (-3) .

Третья матрица получена из второй следующим образом: вторая строка умножена на (-4) и прибавлена к третьей строке.

Последней матрице соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_2 - 4x_3 = -7, \\ 22x_3 = 22. \end{cases}$$

Из третьего уравнения находим $x_3 = 2$.

Из второго: $x_2 = 4x_3 - 7 = 4 \cdot 2 - 7 = 1$.

Из первого: $x_1 = 4x_2 - 3x_3 + 5 = 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 5 = 3$.

Множество решений системы имеет вид: $\{(3;1;2)\}$.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 7, \\ 7x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 6x_4 = 6. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & -3 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & -6 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & -5 & 8 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

В результате данная система сводится к системе трех уравнений с че-

$$\text{тырьмя неизвестными} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ -2x_2 - x_3 + x_4 = -1, \\ -2x_3 + 5x_4 = 8. \end{cases}$$

Из последнего уравнения выразим x_3 через x_4 : $x_3 = -4 + \frac{5}{2}x_4$.

Второе уравнение с учетом последней формулы дает возможность выразить неизвестную x_2 : $x_2 = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}x_4$.

Тогда из первого уравнения получим x_1 : $x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}x_4$.

Система имеет бесконечное множество решений, т.к. свободная неизвестная x_4 может принимать любые действительные значения, а базисные неизвестные x_1, x_2, x_3 выражаются через x_4 . Множество решений системы может быть записано в виде: $\left\{ \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4}x_4; \frac{5}{2} - \frac{3}{4}x_4; -4 + \frac{5}{2}x_4; x_4 \right) \middle| x_4 \in R \right\}$.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 6. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & -6 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & -5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & -9 & -9 \\ 0 & -1 & 1 & -9 & -10 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -9 & -9 \\ 0 & -1 & 1 & -9 & -10 \\ 0 & -3 & 1 & -4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 23 & 21 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 23 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Последней матрице соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ -x_2 + x_3 - 9x_4 = -9, \\ -2x_3 + 23x_4 = 21, \\ 0 \cdot x_4 = -1. \end{cases}$$

Эта система несовместна, т.к. никакие значения неизвестных не могут удовлетворить ее последнему уравнению.

Ответ. Система не имеет решений.

УПРАЖНЕНИЯ

3.1. Решить системы уравнений, используя метод Гаусса.

$$1) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 2, \\ 5x_1 - 9x_2 - 6x_3 = 1. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 - 10x_3 = 5. \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 9x_3 = 3. \end{cases} \quad 5) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 8. \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 8x_3 = 5, \\ 2x_1 - 7x_2 + 9x_3 = 1, \\ 3x_1 - 6x_2 + 7x_3 = 4. \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 4, \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases} \quad 8) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 1. \end{cases} \quad 9) \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 6, \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 7. \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 3, \\ 5x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 7. \end{cases} \quad 11) \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 3. \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 2, \\ 8x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 3. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 6, \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 8. \end{cases} \quad 15) \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 4, \\ 5x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -2, \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases} \quad 17) \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 2, \\ 6x_1 - x_2 - 6x_3 + 9x_4 = 1. \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6, \\ x_1 - 9x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 9, \\ 3x_1 + 8x_2 - 6x_3 - 2x_4 = 5. \end{cases} \quad 19) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 8x_4 = 3, \\ x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 8x_4 = 2. \end{cases}$$

$$20) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 8x_4 = -1, \\ 4x_1 + 9x_2 + 2x_3 + 12x_4 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases} \quad 21) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 14, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -7. \end{cases}$$

$$22) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 8, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 11, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 17. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = -1, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 - x_5 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 4x_4 - 6x_5 = 7. \end{cases}$$

$$24) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 9, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 5. \end{cases} \quad 25) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 14, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 4x_4 - 3x_5 = -1. \end{cases}$$

$$26) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_6 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_4 - x_6 = 1. \end{cases} \quad 27) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 21, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + x_6 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 - 4x_5 + 5x_6 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 6x_4 + x_5 - x_6 = 24, \\ 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 5x_4 - 2x_5 + x_6 = 19, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 - 7x_6 = 5. \end{cases}$$

3.2. Какие переменные в системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_3 + x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

можно считать базисными, а какие – свободными?

3.3. Указать, чему равна разность между числом базисных и свободных переменных системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

4. МАТРИЦЫ, ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Рассмотрим *матрицу*, содержащую m строк и n столбцов, такую матрицу называют матрицей размера $m \times n$ и пишут $A_{m \times n}$. Элементы матрицы, стоящие на диагонали, идущей от верхнего левого угла, образуют *главную диагональ*.

Матрицы *равны между собой*, если они имеют одинаковое количество строк и столбцов и соответствующие их элементы равны, т.е.

$$A = B, \text{ если } a_{ij} = b_{ij}, \text{ где } i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Матрица размера $n \times n$ называется *квадратной матрицей n -го порядка*.

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной*.

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется *единичной*. Обозначается буквой E .

Например,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ — единичная матрица 3-го порядка.}$$

Квадратная матрица называется *треугольной*, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*. Обозначается буквой O .

Матрицы, состоящие из одного столбца, или из одной строки называют

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ — матрица-столбец, } (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) \text{ — матрица-строка.}$$

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей *транспонированной* к данной. Обозначается A^T . Транспонированная матрица обладает следующим свойством: $(A^T)^T = A$.

Пример 1. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; если $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то $A^T = (1 \ 0)$.

Рассмотрим, как определяются *операции над матрицами*.

Операция сложения матриц вводится только для матриц одинаковых размеров.

Суммой двух матриц $A_{m \times n} = (a_{ij})$ и $B_{m \times n} = (b_{ij})$ называется такая матрица $C_{m \times n} = (c_{ij})$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов слагаемых матриц, т.е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$). Записывают $C = A + B$.

Пример 2.

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяется *разность матриц*.

Произведением матрицы $A_{m \times n} = (a_{ij})$ на число λ называется матрица $B_{m \times n} = (b_{ij})$, такая, что $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$ ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$). Записывают $B = \lambda \cdot A$.

Пример 3. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$. Найти $-3A$.

Каждый элемент данной матрицы A умножаем на число -3 , в результате получим

$$-3A = -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 9 & -15 \\ -18 & -6 \end{pmatrix}.$$

Матрица $-A = (-1) \cdot A$ называется *противоположной матрице A* . Разность матриц $A - B$ можно определить так: $A - B = A + (-B)$.

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают следующими *свойствами*:

- 1) $A + B = B + A$;
- 2) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

- 3) $A + O = A$;
- 4) $A - A = O$;
- 5) $1 \cdot A = A$;
- 6) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$;
- 7) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$;
- 8) $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha \beta) \cdot A$.

Здесь A, B, C – матрицы, α и β – числа.

Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Произведением матрицы $A_{m \times n} = (a_{ij})$ на матрицу $B_{n \times p} = (b_{jk})$ называется такая матрица $C_{m \times p} = (c_{ik})$, каждый элемент которой равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A на соответствующие элементы k -го столбца матрицы B , т.е.

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk}, \text{ где } i = \overline{1, m}, k = \overline{1, p}.$$

Если матрицы A и B квадратные одного размера, то произведения AB и BA всегда существуют. Легко доказать, что $A \cdot E = E \cdot A = A$, где A – квадратная матрица, E – единичная матрица того же размера.

Пример 4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

Произведение $A \cdot B$ не определено, так как число столбцов матрицы A не совпадает с числом строк матрицы B ($3 \neq 2$). При этом определено произведение $B \cdot A$, которое находят следующим образом:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1+9 & 2+3 & 1+0 \\ 1+6 & 2+2 & 1+0 \end{pmatrix}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A и B называются *перестановочными*, если $AB = BA$.

Умножение матриц обладает следующими свойствами:

- 1) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
- 2) $A \cdot (B + C) = AB + AC$;
- 3) $(A + B) \cdot C = AC + BC$;
- 4) $\alpha(AB) = (\alpha A)B$,

(если записанные суммы и произведения матриц имеют смысл).

Для операции транспонирования верны *свойства*:

$$1) (A+B)^T = A^T + B^T; \quad 2) (AB)^T = B^T \cdot A^T.$$

Квадратная матрица A называется *невыврожденной*, если ее определитель не равен нулю: $\Delta = \det A \neq 0$, в противном случае ($\Delta = 0$) матрица A называется *вырожденной*.

Матрица A^{-1} называется *обратной* квадратной матрице A , если выполняется условие:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A . Матрица A^{-1} имеет те же размеры, что и матрица A .

ТЕОРЕМА. Всякая невырожденная матрица имеет обратную, при этом

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}. \quad \boxed{4.1}$$

Для нахождения обратной матрицы следует:

- убедиться, что $\Delta = \det A \neq 0$;
- составить матрицу $A^* = (A_{ij})$, элементы которой есть алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A ;
- транспонировать матрицу A^* ;
- обратной матрицей будет матрица $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T$.

Пример 5. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти обратную матрицу и

сделать проверку.

Вычислим определитель матрицы A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 \neq 0.$$

Находим алгебраические дополнения элементов данной матрицы и составляем матрицу A^* :

$$A_{11} = 5, \quad A_{12} = 0, \quad A_{13} = 0, \quad A_{31} = 2, \quad A_{32} = -1, \quad A_{33} = 3.$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ транспонируем эту матрицу и каждый элемент}$$

матрицы $(A^*)^T$ делим на $\det A$, в результате получим обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Сделаем *проверку*. Убедимся в том, что $A \cdot A^{-1} = E$.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \\ & = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5+0+0 & -4+4+0 & 2-2+0 \\ 0+0+0 & 0+6-1 & 0-3+3 \\ 0+0+0 & 0+2-2 & 0-1+6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЯ

4.1. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$.

Найти: 1) $2C$; 2) $A - B + C$; 3) $2A - 3B + C$.

4.2. Найти матрицу X , если $X = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

4.3. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. Найти матрицу B , удовлетворяющую ус-

ловию: $2A - B = O$.

4.4. Дана матрица $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу X , удовлетворяющую ус-

ловию: $A + X = E$.

4.5. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Вычислить $x - y$, если $C = A - B$.

4.6. Даны матрицы: A размера 3×4 , B размера $k \times n$ и C размера 3×5 .

Чему равна сумма $k + n$, если $A \times B = C$?

4.7. Даны матрицы $X = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Существуют ли произведения:

- 1) $A \cdot B$; 2) $B \cdot C$; 3) $X \cdot D$; 4) $B \cdot A$; 5) $C \cdot D$; 6) $X \cdot Y$; 7) $D \cdot Y$;
8) $C \cdot B$; 9) $Y \cdot X$; 10) $D \cdot C$?

4.8. Найти произведения матриц: 1) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

$$9) \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; 10) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$11) \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}; 12) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$13) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 7 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}; 14) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

4.9. Найти матрицу транспонированную к данной матрице A :

$$1) A = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; 2) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}; 3) A = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; 4) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & -5 & 7 \\ 9 & 8 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

4.10. Выполнить действия: 1) $A^2 - 5A + 3E$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$;

$$2) A^2 - A - E, \text{ если } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.11. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$

Найти: 1) $2A + 3B^T$; 2) $3A^T + 4B$.

4.12. Найти определитель произведения матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ на транспонированную.

4.13. Умножить матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ на транспонированную.

4.14. 1) Матрица $A = \begin{pmatrix} -\lambda & 3 \\ -2 & \mu \end{pmatrix}$ не имеет обратной при: а) $\lambda = 3, \mu = 2$;

б) $\lambda = 1, \mu = 4$; в) $\lambda = -2, \mu = 3$; г) $\lambda = 0, \mu = 0$.

2) Матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & \lambda & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ не имеет обратной при λ , равном:

а) 0; б) -2 ; в) $\frac{1}{2}$; г) 2.

4.15. Найти матрицу, обратную каждой из матриц. Сделать проверку.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -8 & 2 \\ -1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; 10) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; 13) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 14) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. МАТРИЧНАЯ ЗАПИСЬ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными

[illegible]

Такую систему удобно записывать в компактной *матричной* форме

$$A \cdot X = B,$$

где A – матрица коэффициентов системы, называемая *основной матрицей*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{столбец неизвестных,}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} - \text{столбец свободных членов системы.}$$

Произведение матриц $A \cdot X$ определено, так как в матрице A столбцов столько же, сколько строк в матрице X .

Пример 1. Записать в матричной форме систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5, \\ 3x_2 + x_3 = 9, \\ x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

Составим матрицу A системы, матрицу решений X и матрицу свободных членов B : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Данная система линейных уравнений в матричной форме запишется так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим **матричный способ решения системы линейных уравнений**.

Определим решение системы n линейных уравнений с n неизвестными в случае, когда определитель матрицы A отличен от нуля ($\det A \neq 0$), то есть существует обратная матрица A^{-1} .

Умножим левую и правую части уравнения $A \cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1} , получим: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$.

Поскольку $A \cdot A^{-1} = E$ и $E \cdot X = X$, то $X = A^{-1} \cdot B$.

Отыскание решения системы по этой формуле называют *матричным способом* решения системы.

Пример 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ с помощью

обратной матрицы.

Вычислим определитель матрицы системы:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Находим обратную матрицу: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Запишем решение системы в матричной форме: $X = A^{-1} \cdot B$ или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Получаем, что $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = -7$.

Пример 3. Найти неизвестную матрицу X из уравнения

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, тогда $A \cdot X = B$.

$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 \neq 0$, следовательно, существует обратная матрица

A^{-1} , поэтому $X = A^{-1} \cdot B$. Находим обратную матрицу $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ и

по правилу умножения матриц получим:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 10 & -18 - 5 \\ -4 + 4 & 6 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

5.1. Записать в матричной форме систему уравнений:

$$1) \begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8, \\ x + 5y + 2z = 5, \\ 2x + 3y + 4z = 3. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x_2 + x_4 = 10, \\ 3x_1 + x_3 + 2x_4 = 17, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$$

5.2. Определить значение x , если выполняется равенство

$$\begin{pmatrix} 7 & x \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

5.3. Решить систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы:

$$1) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 9, \\ 3x_1 - 4x_2 = 5. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 2, \\ 4x_1 - x_2 = 1. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x + y + 2z = 5, \\ 3x - 2y + 3z = 4, \\ 2x - 3y + 5z = 1. \end{cases} \quad 5) \begin{cases} 2x + y + z = 11, \\ x + 2z = 15, \\ 3x + y + 2z = 14. \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

5.4. Найти неизвестную матрицу X из уравнений:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}; \quad 2) X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix};$$

$$3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

6. РАНГ МАТРИЦЫ. КРИТЕРИЙ СОВМЕСТИМОСТИ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть дана прямоугольная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выделим в этой матрице k произвольных строк и k произвольных столбцов (здесь $1 \leq k \leq \min(m, n)$).

Определитель k -го порядка, составленный из элементов матрицы A , расположенных на пересечении выделенных k строк и k столбцов, называется *минором* k -го порядка матрицы A .

Рангом матрицы называется наибольший из порядков ее миноров, отличных от нуля.

Ранг матрицы обозначают одним из символов: $r(A)$, r_A , rgA , $rangA$.

Очевидно, что ранг квадратной матрицы n -го порядка, определитель которой отличен от нуля, равен ее порядку:

$$\det A \neq 0 \Rightarrow r(A) = n.$$

Пример 1. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Данная матрица имеет размеры 2×3 , т.е. $m = 2$, $n = 3$, поэтому k может принимать значения 1 или 2. Из элементов матрицы можно составить шесть миноров первого порядка, являющихся самими элементами матрицы, и три минора второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Среди миноров второго порядка имеется один, отличный от нуля:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Следовательно, ранг данной матрицы равен двум: $r(A) = 2$.

Если размеры матрицы не очень малы, то перебор всех миноров – задача, требующая громоздких вычислений. Поэтому проще и рациональнее находить ранг матрицы с помощью следующих *элементарных преобразований*:

- перестановка любых двух строк;
- умножение всех элементов строки на отличное от нуля число;
- прибавление ко всем элементам какой-либо строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число;

Такие же действия возможны и со столбцами матрицы, но если в итоге придется решать систему линейных уравнений, то удобнее преобразовывать только строки. Важно, что *элементарные преобразования не меняют ранга матрицы*, и с их помощью любая матрица может быть приведена к *ступенчатому виду*.

Ступенчатой матрицей называется матрица вида

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,k_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2,k_2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{i,k_i} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где $a_{i,k_i} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, r$), $k_1 < k_2 < \dots < k_r$, т.е. матрица, характеризующаяся следующими условиями:

- 1) ниже нулевой строки стоят только нулевые строки;
- 2) первый нулевой элемент какой-либо строки стоит строго правее первого нулевого элемента предыдущей строки.

Ранг ступенчатой матрицы B равен числу ее ненулевых строк: $r(B) = r$. Если же матрица B была получена из матрицы A при помощи элементарных преобразований, то ранги этих матриц совпадают:

$$r(A) = r(B) = r.$$

Пример 2. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}$, используя

элементарные преобразования.

Вычитая из третьей строки удвоенную первую, получим:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица является ступенчатой, содержащей две ненулевые строки.

Следовательно, $r(A) = 2$.

Пример 3. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

Вычтем из первой строки вторую и поменяем местами первую и вторую строки:

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Вычитая из третьей строки удвоенную вторую и поменяв затем эти строки местами, получим:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Вычтем из третьей строки удвоенную вторую

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица является ступенчатой, поэтому $r(A) = 3$.

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными

[illegible]

и запишем для нее основную и расширенную матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Сформулируем критерий совместности системы линейных уравнений.

Теорема Кронекера-Капелли. Для того чтобы система линейных уравнений была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранги ее основной и расширенной матриц совпадали: $r(A) = r(\bar{A})$.

Перечислим возможные ситуации, возникающие в ходе исследования системы в зависимости от соотношения между числом неизвестных и рангами основной и расширенной матриц:

- если ранг основной матрицы совместной системы равен числу неизвестных ($r(A) = r(\bar{A}) = n$), то *система имеет единственное решение*;
- если ранг основной матрицы совместной системы меньше числа неизвестных ($r(A) = r(\bar{A}) < n$), то *система имеет бесконечное множество решений*;
- если ранг основной матрицы системы меньше ранга ее расширенной матрицы ($r(A) < r(\bar{A})$), то *система не имеет решений (несовместна)*.

Пример 3. Исследовать на совместность систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 9, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases}$$

Запишем основную и расширенную матрицы данной системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 2 & -3 & 4 & | & 9 \\ 3 & 2 & 5 & | & 6 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\det A \neq 0$, то $r(A) = 3$. Очевидно, что $r(\bar{A}) = 3$. Получили:

$$r(A) = r(\bar{A}) = 3 = n.$$

Система совместна и определена, т.е. имеет единственное решение.

Пример 4. Исследовать на совместность систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$$

В случае совместности найти все решения.

Составим основную и расширенную матрицы данной системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 7 \end{array} \right).$$

Преобразуем эти матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & -5 \\ 0 & 5 & -10 & -5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Получим, что $r(A) = 2$, $r(\bar{A}) = 2$, следовательно, система совместна.

Т.к. число неизвестных равно трем ($n = 3$) и $r(A) = r(\bar{A}) < n$, то система является неопределенной, т.е. имеет бесконечное множество решений.

Учитывая вид преобразованной расширенной матрицы $\bar{A}$, запишем эквивалентную систему уравнений:
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$$

Считая неизвестную x_3 свободной, найдем базисные неизвестные:

$$x_2 = 2x_3 - 1, \quad x_1 = 2x_2 - 3x_3 + 4 = x_3 + 2.$$

Следовательно, множество всех решений системы имеет вид:

$$\{(x_3 + 2; 2x_3 - 1; x_3) | x_3 \in R\}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

6.1. Вычислить ранг матрицы:

$$1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; 4) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$5) \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}; 6) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}; 7) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}; 8) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix};$$

$$9) \begin{pmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 2 & 6 & -9 \\ 3 & 5 & -8 \end{pmatrix}; 10) \begin{pmatrix} 1 & -8 & 3 \\ 2 & -7 & 5 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}; 11) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix};$$

$$12) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}; 13) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$14) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 5 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 9 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}; 15) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.2. Исследовать систему на совместность и для совместной системы указать, сколько именно решений она имеет:

$$1) \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5, \\ 2x_1 + 4x_2 = 8, \\ 3x_1 - 2x_2 = 4. \end{cases} 2) \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 3, \\ 3x_1 + 7x_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 = 5. \end{cases} 3) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 = 3, \\ 5x_1 + 9x_2 = 4. \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 = 7. \end{cases} 5) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 8, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 7. \end{cases} 6) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 9. \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases} \quad 8) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7, \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases} \quad 10) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 9. \end{cases} \quad 12) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 9, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$$

6.3. При каком a система уравнений $\begin{cases} 2x - 5y = 1, \\ ax + 5y = -2 \end{cases}$ не имеет решений?

6.4. Ранг матрицы A равен k . Укажите, какие из следующих утверждений являются верными:

- 1) все миноры порядка k матрицы A равны нулю;
- 2) число строк матрицы A может быть больше k ;
- 3) матрица A имеет отличный от нуля минор порядка k ;
- 4) любой минор порядка $(k + 1)$ матрицы A равен нулю;
- 5) число ненулевых строк матрицы A может быть больше k ;
- 6) число ненулевых строк матрицы A может быть меньше k .

7. ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО. БАЗИС. РАЗМЕРНОСТЬ. ПОНЯТИЕ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Ранее мы неоднократно встречались с множествами, в которых были определены операции сложения и умножения на число, например, множества матриц, многочленов, векторов, а также само множество действительных чисел. В каждом из этих множеств операции вводятся по-своему, но имеют одни и те же свойства: коммутативность и ассоциативность сложения, дистрибутивность умножения на число относительно сложения и т.д.

Целесообразно исследовать множество, состоящее из элементов произвольной природы, в котором определены операции сложения двух элементов и умножение элемента на число. Эти операции могут быть осуществляться каким угодно способом, требуется лишь, чтобы они обладали некоторым набором свойств.

Множество L называется *линейным* (или *векторным*) *пространством*, а его элементы – *векторами*, если

– задана *операция сложения*, т.е. для любых двух элементов a и b , взятых из L , определяется элемент из L , называемый их *суммой* и обозначаемый $a + b$;

– задана *операция умножения на число*, согласно которой любому элементу a , взятому из L , ставится в соответствие элемент из L , называемый *произведением a на α* и обозначаемый αa ;

– для любых элементов a, b, c , принадлежащих L , и любых чисел α, β выполняются следующие требования (аксиомы):

1) $a + b = b + a$;

2) $(a + b) + c = a + (b + c)$;

3) в L имеется элемент 0 (т.н. *нуль-вектор*) такой, что справедливо равенство $a + 0 = a$;

4) вместе с каждым элементом $a \in L$ существует элемент $(-a) \in L$ такой, что $a + (-a) = 0$;

5) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$;

6) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$;

$$7) \alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a;$$

$$8) 1 \cdot a = a.$$

Если числа в определении линейного пространства являются действительными, то линейное пространство называется действительным; в случае, когда рассматриваются комплексные числа, получаем комплексное линейное пространство.

Пример 1. Множество R_n , состоящее из n -мерных векторов, будет линейным пространством.

Пример 2. Множество квадратных матриц n -го порядка является линейным пространством.

Пример 3. Множество всех многочленов, степень которых не превосходит заданного числа n , будет линейным пространством.

Пример 4. Известные числовые множества (множество целых чисел, множество рациональных чисел, множество действительных чисел) являются линейными пространствами.

Пример 5. Существует линейное пространство, состоящее из одного элемента 0. Операции в нем задаются равенствами $0 + 0 = 0$, $\alpha \cdot 0 = 0$. Это пространство называется нулевым.

Система векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$ называется *линейно независимой*, если их нулевая линейная комбинация возможна только при нулевых значениях коэффициентов:

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0.$$

Если же нулевая линейная комбинация векторов возможна и при некотором ненулевом наборе коэффициентов, т.е. существует хотя бы один коэффициент k_i , отличный от нуля, то векторы $a_1, a_2, \dots, a_n$ называются *линейно зависимыми*.

Пример 6. Любые два неколлинеарных (т.е. не параллельных одной прямой) вектора плоскости являются линейно независимыми, но любые три вектора плоскости линейно зависимы. Так, если a_1 и a_2 – неколлинеарные векторы, то по правилу параллелограмма можем найти, что $a_3 = k_1 a_1 + k_2 a_2$ (рис. 2).

Аналогично в пространстве любые три не-компланарных (т.е. не параллельных одной плоскости) вектора будут линейно независимыми. Однако любые четыре пространственных вектора уже линейно зависимы.

Конечная упорядоченная система векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ называется *базисом* в пространстве L , если она линейно независима и каждый вектор $a \in L$ есть линейная комбинация векторов этой системы:

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n.$$

Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называются *координатами* (или *компонентами*) вектора a по данному базису: $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Линейное пространство, в котором существует базис, состоящий из n векторов, называется *n -мерным*, а число n – *размерностью* пространства. При этом размерность нулевого пространства полагается равной нулю.

Пример 7. Прямоугольная декартова система координат R_2 – двумерное линейное пространство (плоскость). Оси Ox и Oy упорядочены следующим образом: если ось Ox повернуть вокруг точки O на угол $\pi/2$ против движения часовой стрелки, то она совпадет с осью Oy . Векторы i и j называются базисными векторами прямоугольной декартовой системы координат. Тогда любой вектор $a \in R_2$ можно представить в виде линейной комбинации векторов i и j : $a = x_0 \cdot i + y_0 \cdot j$ (рис. 3), числа x_0 и y_0 будут координатами вектора a в этом базисе: $a = (x_0, y_0)$.

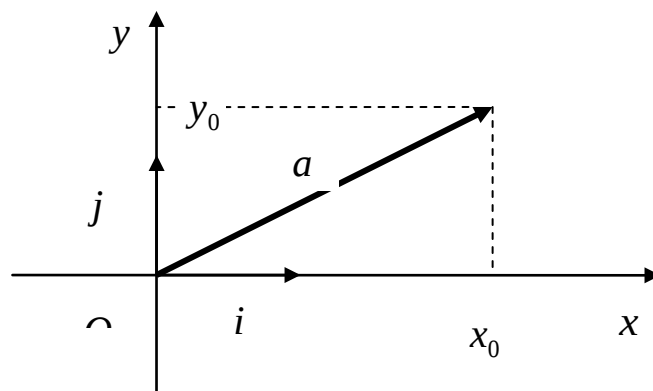


Рис. 3

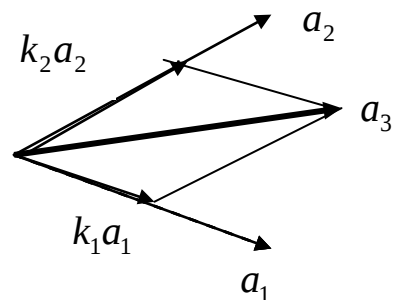


Рис. 2

Пример 8. Множество всех многочленов переменной x степени, не превосходящей n , является линейным пространством размерности $(n + 1)$. Можно доказать, базис в нем образуют многочлены $1, x, x^2, \dots, x^n$.

Действительное линейное пространство называется действительным *евклидовым пространством*, если выполнены следующие два требования:

– имеется правило, с помощью которого любым двум элементам a и b этого пространства ставится в соответствие действительное число, называемое *скалярным произведением* этих элементов и обозначаемое $a \cdot b$;

– указанное правило подчинено четырем аксиомам:

$$1) a \cdot b = b \cdot a,$$

$$2) (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c;$$

$$3) (\alpha a) \cdot b = \alpha(a \cdot b) \text{ для любого действительного } \alpha;$$

$$4) a \cdot a > 0, \text{ если } a \neq 0; a \cdot a = 0, \text{ если } a = 0.$$

Пример 9. Рассмотрим линейное пространство R_3 всех векторов геометрического пространства. Скалярное произведение двух векторов здесь определено равенством

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \varphi,$$

где φ – угол между векторами. Можно показать, что аксиомы 1–4 справедливы. Следовательно, R_3 является евклидовым пространством.

Пример 10. Если в n -мерном векторном пространстве R_n зафиксирован некоторый базис, то скалярное произведение векторов $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $b = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ можно определить по формуле:

$$a \cdot b = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n.$$

Выполнение аксиом проверяется непосредственно, откуда следует, что R_n будет евклидовым пространством.

Отметим некоторые свойства евклидова пространства. Для любых его элементов a и b справедливы следующие неравенства:

$$-(a \cdot b)^2 \leq |a|^2 \cdot |b|^2 \text{ (неравенство Коши-Буняковского);}$$

здесь $|a|$ и $|b|$ – длины векторов a и b , определяемые как квадратный корень из скалярного квадрата ($|a| = \sqrt{a \cdot a}$, $|b| = \sqrt{b \cdot b}$);

$$-|a+b| \leq |a| + |b| \text{ (неравенство треугольника).}$$

Векторы a и b называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю: $a \cdot b = 0$.

Для ортогональных векторов a и b выполняется равенство

$$|a+b|^2 = |a|^2 + 2a \cdot b + |b|^2 = |a|^2 + |b|^2 \text{ (теорема Пифагора).}$$

УПРАЖНЕНИЯ

7.1. Установить, что множество всех многочленов n -ой степени не является линейным пространством. Почему?

7.2. Доказать, что все квадратные матрицы n -го порядка, элементами которых являются действительные числа, образуют линейное пространство относительно традиционно определяемых операций сложения матриц и умножения матрицы на число. Найти базис и размерность этого пространства.

7.3. Показать, что множество комплексных чисел по отношению к обычным операциям сложения и умножения на действительное число представляет собой действительное линейное пространство.

7.4. Объясните, почему в n -мерном векторном пространстве, где $n > 1$, нельзя ввести скалярное произведение с помощью формулы

$$a \cdot b = \alpha_1 \cdot \beta_1,$$

где α_1 и β_1 – первые координаты векторов a и b в данном базисе. Какая из аксиом 1–4 скалярного произведения оказалась бы в этом случае нарушенной?

7.5. Докажите неравенство

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \cdot (\beta_1^2 + \beta_2^2) \geq (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2$$

(частный случай неравенства Коши-Буняковского для $n = 2$) непосредственно, рассмотрев разность между левой и правой частью.

8. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

1. Вычислить определитель разложением по третьему столбцу $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить M_{13} и A_{31} , если $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений тремя способами:

а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ 4x + y + 4z = 9, \\ 3x + 5y + 2z = 10. \end{cases}$$

4. Выполнить действия: $A^2 + 2A - E$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2, \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Вычислить определитель разложением по третьей строке $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить M_{21} и A_{12} , если $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -2 & 4 \\ 1 & 10 & 2 & 12 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений тремя способами

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 3, \\ 4x + 2y + 5z = 5, \\ 3x + 4y + 7z = 2. \end{cases}$$

4. Выполнить действия: $A^2 - 4A + E$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Вычислить определитель разложением по второму столбцу $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить M_{32} и A_{23} , если $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 7 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений тремя способами $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8, \\ x + 5y + 2z = 5, \\ 2x + 3y + 4z = 3. \end{cases}$

4. Выполнить действия: $5B + B^2 - 4E$, если $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Вариант 4

1. Вычислить определитель разложением по третьему столбцу $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить M_{43} и A_{34} , если $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ -11 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений тремя способами $\begin{cases} x + 3y + 2z = 4, \\ 2x + 6y + z = 2, \\ 4x + 8y - z = 2. \end{cases}$

4. Выполнить действия: $AB - BA$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$

Вариант 5

1. Вычислить определитель разложением по второй строке $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить M_{43} и A_{34} , если $\Delta = \begin{vmatrix} -7 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений тремя способами

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 4, \\ 3x + 6y + 2z = 4, \\ 4x - y - 3z = 1. \end{cases}$$

4. Выполнить действия: $Y^2 - 3Y + 5E$, если $Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

Вариант 6

1. Вычислить определитель разложением по первому столбцу $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить M_{23} и A_{32} , если $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -11 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений тремя способами

$$\begin{cases} x + 3y - 4z = -4, \\ 2x - y + 2z = 6, \\ 3x + 2y + z = 2. \end{cases}$$

4. Выполнить действия: $C^2 + 3C - E$, если $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 3, \\ 3x_1 + 11x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Вариант 7

1. Вычислить определитель разложением по первой строке $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить M_{14} и A_{41} , если $\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений тремя способами

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -7, \\ x + 4y + 2z = -1, \\ x - 4y = -5. \end{cases}$$

4. Выполнить действия: $8A - A^2$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23. \end{cases}$$

Вариант 8

1. Вычислить определитель разложением по второму столбцу $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить M_{13} и A_{31} , если $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & -7 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений тремя способами

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ 2x - y + z = 6, \\ x + 5y = -3. \end{cases}$$

4. Выполнить действия: $AB - BA$, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10. \end{cases}$$

Вариант 9

1. Вычислить определитель разложением по третьей строке $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить M_{33} и A_{33} , если $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений тремя способами

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8, \\ x + 5y + 2z = 5, \\ 2x + 3y + 4z = 3. \end{cases}$$

4. Выполнить действия: $A^2 + 5A - 3E$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 1, \\ 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -2. \end{cases}$$

Вариант 10

1. Вычислить определитель разложением по второму столбцу $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить M_{34} и A_{43} , если $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & 1 & 5 \\ -4 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений тремя способами

$$\begin{cases} x - 2y = -4, \\ 2x + 3y = 13, \\ 3x + y - z = 3. \end{cases}$$

4. Выполнить действия: $B^2 - 5B + 2E$, если $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \\ 8 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$$

Вариант 11

1. Вычислить определитель разложением по третьей строке $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить M_{31} и A_{13} , если $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -5 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений тремя способами

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ 2x - y - z = 1, \\ x + 3y + 4z = 6. \end{cases}$$

4. Выполнить действия: $X^2 + 5X + E$, если $X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и в случае совместности решить ее методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14. \end{cases}$$

Вариант 12

1. Вычислить определитель разложением по первому столбцу $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить M_{21} и A_{12} , если $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 9 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & -4 & 8 & 2 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений тремя способами $\begin{cases} x - 2y + z = 1, \\ 3x + 2y + 2z = -2, \\ 2x - y + z = 2. \end{cases}$

4. Выполнить действия: $A^2 + 3A - 4E$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Вариант 13

1. Вычислить определитель разложением по третьей строке $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить M_{11} и A_{11} , если $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & -9 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -6 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений тремя способами

$$\begin{cases} x + y - z = -2, \\ 4x - 3y + z = 1, \\ 2x + y - 5z = 1. \end{cases}$$

4. Выполнить действия: $5Y - Y^2$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 9x_4 = 40, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37. \end{cases}$$

Вариант 14

1. Вычислить определитель разложением по первой строке $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 5 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить M_{23} и A_{32} , если $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 4 \\ 7 & -4 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений тремя способами

$$\begin{cases} x + 5y + z = 0, \\ 2x - 4y - 3z = -1, \\ 3x + 4y + 2z = 8. \end{cases}$$

4. Выполнить действия: $5C - C^2 + E$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 \quad \quad - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 \quad \quad - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$$

Вариант 15

1. Вычислить определитель разложением по второму столбцу $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить M_{44} и A_{44} , если $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -12 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -7 & -6 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений тремя способами

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 3, \\ 2x - 4y + 3z = 1, \\ 3x - y + 5z = 2. \end{cases}$$

4. Выполнить действия: $E + 2C - C^2$, если $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 5, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3. \end{cases}$$

Вариант 16

1. Вычислить определитель разложением по второму столбцу $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -8 \\ 9 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить M_{23} и A_{32} , если $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений тремя способами

$$\begin{cases} 2x - 3y + 7z = 5, \\ x + y - 2z = 0, \\ 3x + z = 3. \end{cases}$$

4. Выполнить действия: $A^2 + 3A - 2E$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант 17

1. Вычислить определитель разложением по второй строке $\begin{vmatrix} -7 & 4 & 2 \\ 1 & -7 & 3 \\ 8 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить M_{14} и A_{41} , если $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -8 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений тремя способами

$$\begin{cases} x + 3y - z = -1, \\ x - y = 3, \\ 4x + y + 2z = 20. \end{cases}$$

4. Выполнить действия: $B^2 - 2B + E$, если $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант 18

1. Вычислить определитель разложением по третьему столбцу $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 1 & 7 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить M_{21} и A_{12} , если $\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений тремя способами

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = 6, \\ x + 2y - z = 8, \\ x + 7y = 18. \end{cases}$$

4. Выполнить действия: $A^2 + 3A - 2E$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + \quad \quad x_3 \quad \quad = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 + 2x_4 = -4. \end{cases}$$

Вариант 19

1. Вычислить определитель разложением по третьей строке $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$

2. Вычислить M_{31} и A_{13} , если $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$

3. Решить систему линейных уравнений тремя способами

$$\begin{cases} x + 5y - 9z = 19, \\ 4x - y + 3z = -2, \\ 2x + y \quad \quad = 2. \end{cases}$$

4. Выполнить действия: $B^2 + 5B - 7E$, если $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 8 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

5. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Вариант 20

1. Вычислить определитель разложением по второму столбцу $\begin{vmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 9 \end{vmatrix}.$

2. Вычислить M_{41} и A_{14} , если $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений тремя способами

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = -5, \\ 4x - y + 5z = 26, \\ x + 3y - 9z = -41. \end{cases}$$

4. Выполнить действия: $A^2 - 3A + 5E$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

Вариант 21

1. Вычислить определитель разложением по первому столбцу $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить M_{32} и A_{23} , если $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений тремя способами $\begin{cases} x - 3y + 4z = -8, \\ 4x + y - 2z = 17, \\ 2x - y = 5. \end{cases}$

4. Выполнить действия: $B^2 - 5B + 2E$, если $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 7 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \quad \quad - x_5 = -3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \quad \quad = 10, \\ \quad \quad x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 1. \end{cases}$$

Вариант 22

1. Вычислить определитель разложением по второй строке $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить M_{21} и A_{12} , если $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -7 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений тремя способами

$$\begin{cases} x + y - z = -2, \\ 4x - 3y + z = 1, \\ 2x + y - 5z = 1. \end{cases}$$

4. Выполнить действия: $A^2 + 4A - 7E$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и в случае совместности решить ее методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 \quad \quad - x_3 = 3. \end{cases}$$

Вариант 23

1. Вычислить определитель разложением по второму столбцу $\begin{vmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить M_{24} и A_{42} , если $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений тремя способами

$$\begin{cases} 2x - y + 6z = 3, \\ x + 5y - z = -1, \\ 3x - 2y = -14. \end{cases}$$

4. Выполнить действия: $B^2 - 5B - E$, если $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 8 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$

Вариант 24

1. Вычислить определитель разложением по первому столбцу $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -2 & 1 & -8 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить M_{43} и A_{34} , если $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений тремя способами

$$\begin{cases} x - 5y + 3z = -19, \\ 2x + 3y - z = 7, \\ x - \quad \quad 5z = -7. \end{cases}$$

4. Выполнить действия: $A^2 + 3A - 5E$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = -1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$$

Вариант 25

1. Вычислить определитель разложением по третьему столбцу $\begin{vmatrix} 3 & -7 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить M_{22} и A_{22} , если $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 11 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений тремя способами

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ 4x - y + 4z = -3, \\ x - 3y \quad \quad = 5. \end{cases}$$

4. Выполнить действия: $B^2 - B + 3E$, если $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + \quad \quad 3x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 \quad \quad = -10, \\ \quad \quad 3x_2 + 2x_3 \quad \quad = 1. \end{cases}$$

Вариант 26

1. Вычислить определитель разложением по третьей строке $\begin{vmatrix} 5 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить M_{24} и A_{42} , если $\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений тремя способами

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -1, \\ x + 4y - z = -9, \\ 3x - y \quad \quad = -8. \end{cases}$$

4. Выполнить действия: $A^2 - 4A + 2E$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -7 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12, \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7. \end{cases}$$

Вариант 27

1. Вычислить определитель разложением по первому столбцу $\begin{vmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 10 & -3 & 6 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить M_{33} и A_{33} , если $\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений тремя способами

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -7, \\ x + 4y + 2z = -1, \\ x - 4y = -5. \end{cases}$$

4. Выполнить действия: $B^2 + 3B - 4E$, если $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5. \end{cases}$$

Вариант 28

1. Вычислить определитель разложением по первой строке $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & -3 & 10 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить M_{41} и A_{14} , если $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений тремя способами

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ 4x - y + 4z = -3, \\ x - 3y = 5. \end{cases}$$

4. Выполнить действия: $X^2 - 2X + 2E$, если $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 7, \\ 9x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 16x_4 + 2x_5 = 25. \end{cases}$$

Вариант 29

1. Вычислить определитель разложением по второму столбцу $\begin{vmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -9 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить M_{32} и A_{23} , если $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \\ -3 & 4 & 7 & 0 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений тремя способами

$$\begin{cases} x + 5y - 4z = 5, \\ x + y - 3z = -3, \\ 4x - 3y + z = -26. \end{cases}$$

4. Выполнить действия: $A^2 - 3A + 5E$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6. \end{cases}$$

Вариант 30

1. Вычислить определитель разложением по третьему столбцу $\begin{vmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить M_{21} и A_{12} , если $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 11 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & 7 \\ -1 & 0 & 0 & 5 \\ 7 & 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений тремя способами

$$\begin{cases} x + 9y - 4z = 7, \\ 3x + 8y + z = 8, \\ 2x - 3y - 2z = 8. \end{cases}$$

4. Выполнить действия: $B^2 + 9A - 4E$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

ОТВЕТЫ

1.1. 1) 12; 2) 10; 3) 19; 4) 18; 5) -14 ; 6) 1; 7) 1; 8) 20; 9) -1 ; 10) 6; 11) 0;
12) 0; 13) 4; 14) 2; 15) 30; 16) 7; 17) 46; 18) 100; 19) 100; 20) 1000;
21) 1000; 22) 1115; 23) $5b^3$; 24) $4ab$; 25) 1; 26) $6a$; 27) 1.

1.2. 1) $x = -1$; 2) $x_1 = 2, x_2 = 3$; 3) $x_1 = 1, x_2 = 2$; 4) $x = 1$;
5) $x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 2$; 6) $x_1 = -3, x_2 = -2, x_3 = 3$;
7) $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 5$; 8) $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 2$.

1.3. 1) 45; 2) 21; 3) 75; 4) 60; 5) 65; 6) 15; 7) 4; 8) -43 ; 9) -12 ; 10) 0; 11) -98 ;
12) -9 ; 13) 3; 14) 0; 15) 4; 16) 2; 17) $4a$; 18) 0; 19) 0.

1.4. 1) $M_{11} = A_{11} = -15, M_{12} = -A_{12} = 70, M_{13} = A_{13} = -45,$
 $M_{21} = -A_{21} = -3, M_{31} = A_{31} = 11$;
2) $M_{11} = A_{11} = 16, M_{12} = -A_{12} = -4, M_{13} = A_{13} = -17,$
 $M_{21} = -A_{21} = 10, M_{31} = A_{31} = 3$;
3) $M_{11} = A_{11} = -3, M_{12} = -A_{12} = -15, M_{13} = A_{13} = -9,$
 $M_{21} = -A_{21} = -1, M_{31} = A_{31} = 0$;
4) $M_{11} = A_{11} = 16, M_{12} = -A_{12} = -32, M_{13} = A_{13} = -32,$
 $M_{21} = -A_{21} = 16, M_{31} = A_{31} = 16$.

1.5. 1) 1; 2) 6; 3) -3 ; 4) -5 ; 5) 14; 6) 44; 7) 2; 8) 18; 9) $-3a_{12} + 2a_{13}$.

1.6. 1) $-2a^2$; 2) -9 ; 3) -22 ; 4) 0; 5) 48; 6) -396 ; 7) 168.

1.8. 1) -16 ; 2) 4; 3) 8; 4) 8; 5) 0; 6) 0; 7) -18 ; 8) 78; 9) 15; 10) -6 .

1.9. 1) 16; 2) -2 .

1.10. $k = -2$.

2.1. 1) $(2; -1)$; 2) $(1; 3)$; 3) $(-2; 5)$; 4) $(-1; -2)$; 5) $(4; -5)$;
6) $((1/2; 1/4))$; 7) $(1; 2; 3)$; 8) $(3; -1/3; 2/3)$; 9) $(2; 1; -2)$;
10) $(1; -1; 1)$; 11) $(2; -3; 4)$; 12) $(1; -1; 3)$; 13) $(1/2; -1/2; 1/4)$;
14) $(5; -4; 3; -2)$; 15) $(3; -1; 0; 1)$; 16) $(1/4; 1/2; -3/4; 1)$;
17) $(-1; 2; 1; -3)$; 18) $(1/2; -1/3; -1/2; 1/4)$; 19) $(2; 1/4; -1/2; -1)$.

- 3.1.** 1) $(2; -1; 3); 2) (1; 2; 3); 3) (x_3 + 18; x_3 - 7; x_3), x_3 \in \mathbf{R};$
 4) $(x_1; 2x_1 + 3x_3 - 1; x_3), x_1 \in \mathbf{R}, x_3 \in \mathbf{R}; 5) \text{ система несовместна};$
 6) $(3; 2; 1); 7) (3; 1; 2); 8) (-2; 1; -1); 9) (x_3 + 13; x_3 + 4; x_3), x_3 \in \mathbf{R};$
 10) $(3x_3 - 9; 6x_3 - 13; x_3), x_3 \in \mathbf{R}; 11) (1/2; -1/2; 1/3);$
 12) $(-1/4; 1/4; 1/2); 13) (2; -2; 5); 14) (-7x_3 - 10; -19x_3 - 28; x_3), x_3 \in \mathbf{R};$
 15) система несовместна; 16) $(1; 2; 3; 4); 17) (-2; -1; 1; 2); 18) (1; 0; -1; 2);$
 19) $(2; -2; -1; 1); 20) (-3,5; -4,5; -1,5; 4,875);$
 21) $(97/27; -196/27; 119/27; 34/27); 22) (5; 4; 3; 2; 1); 23) (1; 2; 0; -1; -2);$
 24) $(1; 2; -1; -2; 3); 25) (5; 4; 1; 2; 3); 26) (3/8; -1/8; -1/4; -1/2; -1/2; 0);$
 27) $(6; 5; 4; 3; 2; 1).$

3.2. x_1, x_2, x_3 – базисные переменные; x_4, x_5 – свободные переменные.

3.3. 2.

$$\mathbf{4.1. 1) } 2C = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 10 & -8 \\ 14 & -12 \end{pmatrix}; \mathbf{2) } A - B + C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -3 \\ 12 & -5 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{3) } 2A - 3B + C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -8 \\ 16 & -11 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{4.2. } \begin{pmatrix} 22 & -11 \\ 3 & 11 \\ -14 & 10 \end{pmatrix}. \mathbf{4.3. } B = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{4.4. } X = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}. \mathbf{4.5. 1. 4.6. 9. 4.7. 1), 2), 7), 8), 9), 10) – да.}$$

4.8. 1) (1), т.е. матрица состоит из одного элемента;

$$\mathbf{2) } \begin{pmatrix} 12 & -8 & 4 \\ 18 & -12 & 6 \\ 24 & -16 & 8 \end{pmatrix}; \mathbf{3) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 6 & 9 & -3 \\ -10 & -15 & 5 \end{pmatrix}; \mathbf{4) } \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \\ -12 & -15 \end{pmatrix}; \mathbf{5) } (1 \quad 7);$$

$$6) \begin{pmatrix} 33 \\ 15 \end{pmatrix}; 7) \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}; 8) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; 9) \begin{pmatrix} -11 \\ -15 \end{pmatrix}; 10) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$11) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 13 & -3 \\ 5 & 10 & 1 & 6 \end{pmatrix}; 12) \begin{pmatrix} 10 & -19 & 15 \\ 4 & -12 & 26 \\ 6 & -15 & 19 \end{pmatrix}; 13) \begin{pmatrix} 0 & 28 & 0 \\ 12 & 0 & 14 \\ 0 & 56 & 0 \end{pmatrix};$$

$$14) \begin{pmatrix} 38 & -14 \\ 55 & -19 \end{pmatrix}.$$

$$4.9. 1) \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} 9 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 3 \\ 8 & 6 & 2 \end{pmatrix}; 4) \begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 8 \\ 4 & -5 & 0 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$4.10. 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$4.11. 1) \begin{pmatrix} 13 & 12 & 14 \\ -5 & -7 & 6 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 19 & -6 \\ 17 & -8 \\ 19 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$4.12. 45. 4.13. \begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}. 4.14. 1) а); 2) б).$$

$$4.15. 1) \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}; 5) \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix};$$

$$7) \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}; 9) \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}; 10) \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 11 & -3 & 5 \\ -17 & 21 & -11 \\ -10 & 6 & 2 \end{pmatrix};$$

$$11) \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; 12) \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}; 13) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; 14) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$5.2. x = 1.$$

5.3. 1) (3;1); 2) (0; -1); 3) $\left(\frac{2}{13}; \frac{3}{13}\right)$; 4) (2; 1; 0); 5) (-9; 17; 12); 6) (2; -2; 3).

5.4. 1) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

6.1. 1) 0; 2) 1; 3) 1; 4) 2; 5) 2; 6) 3; 7) 2; 8) 2; 9) 3; 10) 3; 11) 2; 12) 3; 13) 4; 14) 4; 15) 5.

6.2. 1), 3), 4), 5), 8), 10), 11) – система является определенной (имеет единственное решение);

7), 12) – система является неопределенной (имеет бесконечное множество решений);

2), 6), 9) – система несовместна.

6.3. $a = -2$. **6.4.** 2), 3), 4).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – 9-е изд. – М. : Айрис-пресс, 2009.
2. Демидович, Б. П. Краткий курс высшей математики: учеб. пособие для вузов / Б. П. Демидович, В. А. Кудрявцев. – М. : ООО «Издательство Астрель», 2004.
3. Виленкин, И. В. Высшая математика для студентов экономических, технических, естественно-научных специальностей вузов / И. В. Виленкин, В. М. Гробер. – Ростов н/Д. : Феникс, 2004.
4. Минорский, В. П. Сборник задач по высшей математике : учеб. пособие для вузов / В. П. Минорский. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 2006.
5. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре : учеб. пособие / под ред. Ю. М. Смирнова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Логос, 2005.

Учебное пособие

ПОЛЕНИЩЕНКО

Лидия Ивановна

НИКОНОВА

СВЕТЛАНА ПАВЛОВНА

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ
ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

2-е издание, исправленное и дополненное

Редактор Т. Е. Мещерякова

Компьютерная верстка И. А. Ерёмкина

Подписано в печать 08.06.2011. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.

Печать трафаретная. Усл. печ. л. 5. Уч.-изд. л. 2,72.

Тираж 300 экз. Заказ № 187

РИО и типография УВАУ ГА(И). 432071, г. Ульяновск, ул. Можайского, 8/8