

## Задачи для самостоятельного решения (часть 1)

- 1) Составить уравнение сферы, если точки  $A \ 4; -1; -3$  и  $B \ 0; 3; -1$  являются концами одного из ее диаметров.
- 2) Выяснить, какие поверхности определяются следующими уравнениями, и построить эти поверхности
  - 1)  $x^2 + y^2 - z^2 = 4$ ; 2)  $x^2 - y^2 = 4z$ ; 3)  $2z = x^2 + \frac{y^2}{2}$ ;
  - 4)  $x^2 + y^2 - z^2 = -4$ ; 5)  $z - 1^2 = x^2 + y^2$ .
- 3) Найти уравнения прямолинейных образующих поверхности  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ , проходящих через точку  $M \ 1; 1; 1$ .
- 4) Составить уравнение эллиптического параболоида, имеющего вершину в начале координат, осью которого является ось  $Oz$  если на его поверхности заданы две точки  $M \ -1; -2; 2$  и  $N \ 1; 1; 1$ .
- 5) Определить какие поверхности определяются следующими уравнениями, и построить их:
  - 1)  $9x^2 + 4y^2 = 36$ ; 2)  $9x^2 - 4z^2 = 36$ ; 3)  $x^2 - y^2 = 0$ ; 4)  $z^2 = 2y$ .
- 6) Найти уравнение поверхности, полученной при вращении прямой
$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$
вокруг оси  $Oy$ .
- 7) Составить уравнение поверхности, образованной вращением кривой
$$\begin{cases} y = x^2 \\ z = 0 \end{cases}$$
вокруг оси  $Oy$ .
- 8) Составить уравнение конуса, вершина которого находится в начале координат, а направляющая задана уравнениями
$$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36, \\ z = 1. \end{cases}$$
- 9) Составить уравнение цилиндра, если образующие параллельны вектору  $\vec{q} = 3; 2; 1$ , а направляющая задана уравнениями
$$\begin{cases} y^2 = 4x, \\ z = 0. \end{cases}$$
- 10) Установить при каком  $m$  плоскость  $my + z = 1$  пересекает двуполостный гиперболоид  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$  по гиперболе.

## Задачи для самостоятельного решения (часть 2)

1. Какие поверхности определяются следующими уравнениями (сделайте чертеж)

а)  $x^2 + y^2 = 4$ ,

г)  $y^2 + 8y - 2x + 18 = 0$ ;

б)  $z^2 = -8x$ ;

д)  $x^2 = y^2$ ;

в)  $16x^2 + 25z^2 = 400$ ;

е)  $9x^2 - 4y^2 + 36x - 8y - 4 = 0$ ?

Ответ: а) круговой цилиндр  $R = 2$ ;

б) параболический цилиндр с образующими параллельными оси  $Oy$ ;

в) эллиптический цилиндр;

г) параболический цилиндр с образующими параллельными оси  $Oz$ ;

д) пара плоскостей, не пересекающихся по оси  $Oz$ ;

е) гиперболический цилиндр, образующие параллельными оси  $Oz$ .

2. Составьте уравнение кругового конуса, образованного вращением прямой  $y = kz$  вокруг оси  $Oy$ .

Ответ:  $k^2 x^2 - y^2 + k^2 z^2 = 0$ .

3. Составьте уравнение двуполостного гиперболоида вращения вокруг оси  $Oy$  (сделайте чертеж).

Ответ:  $\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ .

4. Составьте уравнение поверхности, образованной вращением параболы

$$\begin{cases} y^2 = 2pz; \\ x = 0 \end{cases}$$

вокруг оси  $Oz$  (сделайте чертеж).

Ответ:  $x^2 + y^2 = 2pz$ .

5. Составьте уравнение эллипсоида вращения вокруг оси  $Ox$  (сделайте чертеж).

Ответ:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ .

6. Методом сечений исследуйте форму и расположение относительно системы координат следующих поверхностей (сделайте чертеж):

а)  $x^2 - 4y^2 + 4(z - 2)^2 - 16 = 0$ ;

б)  $4x^2 + 3z^2 - 12y + 24 = 0$ ;

в)  $4x^2 - y^2 + z^2 = 4$ ;

г)  $x^2 + 2(y - 2)^2 + 3(z - 1)^2 = 18$ ;

Ответ: а) односторонний гиперболоид;    в) эллипсоид;

      б) эллиптический параболоид;    г) двуполостный гиперболоид.

7. Выделением полных квадратов и переносом начала координат упростите уравнение поверхностей:

а)  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y - 6z + 20 = 0$ ;

б)  $4x^2 + y^2 - 8z^2 + 8x - 4y + 16z - 32 = 0$ ;

в)  $9x^2 - 4y^2 - 36z^2 - 18x - 16y - 216z - 367 = 0$ ;

г)  $3x^2 + y^2 + 2z^2 - 12x - 6y + 4z - 13 = 0$ ;

д)  $2x^2 - 3z^2 + 4x + 2y + 6z + 1 = 0$ ;

е)  $2x^2 + 3y^2 + 12x - 12y - 18z + 30 = 0$ ;

ж)  $x^2 + 4y^2 - 9z^2 - 2x - 16y - 18z + 45 = 0$ ;

Ответ: а)  $X^2 + Y^2 + Z^2 = 9$  – сфера;

б)  $\frac{X^2}{8} + \frac{Y^2}{32} - \frac{Z^2}{4} = 1$  – однополостный гиперболоид;

в)  $\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{9} - \frac{Z^2}{1} = 1$  – двуполостный гиперболоид;

г)  $\frac{X^2}{12} + \frac{Y^2}{36} + \frac{Z^2}{18} = 1$  – эллипсоид;

д)  $2X^2 - 3Z^2 = 2Y$  – гиперболоид параболический;

е)  $2X^2 + 3Y^2 = 18Z$  – эллиптический гиперболоид;

ж)  $\frac{X^2}{36} + \frac{Y^2}{9} - \frac{Z^2}{4} = -1$  – двуполостный гиперболоид.

8. Запишите уравнение проекции на координатную плоскость  $xOy$  линии пересечения эллиптического параболоида  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 2z$  плоскостью  $3x - 4y - z + 5 = 0$  и, приведя его к каноническому виду, установите, какую линию оно задает.

Ответ:  $\frac{X^2}{152} + \frac{Y^2}{228} = 1$  – эллипс.

9. В каких точках прямая  $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-1}$  пересекает эллипсоид

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{2} = 1?$$

Ответ:  $(1, 2, -1)$  и  $(-1, -2, 1)$ .

10. Докажите, что прямая  $\frac{x-3}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$  лежит на однополостным

гиперболоиде  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{4} = 1$ .

11. Составьте уравнение множества точек, расположенных вдвое ближе к точке  $A(2, 0, 0)$ , чем к точке  $B(-4, 0, 0)$ .

Ответ:  $(x - 4)^2 + y^2 + z^2 = 16$ .