

Вычисление определителей

Пример 1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 5 \cdot (-3) = 8 + 15 = 23.$

Пример 2. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 6 \\ 9 & 8 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. Вычислим данный определитель разложением по элементам первой строки:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 6 \\ 9 & 8 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot (7 - 48) - 3 \cdot (5 - 54) + 4 \cdot (40 - 63) = 2 \cdot (-41) - 3 \cdot (-49) + 4 \cdot (-23) = \\ &= -82 + 147 - 92 = -27. \end{aligned}$$

Пример 3. Вычислить определитель с помощью разложения по строке (или столбцу):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Удобнее всего разлагать определитель по строке (или столбцу), в которой встречается наибольшее число нулевых элементов. В данном случае – это четвертый столбец. Итак, имеем

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} + \\ &+ 0 \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \Delta_1 + 3 \cdot \Delta_2. \end{aligned}$$

Полученные в итоге два определителя третьего порядка вычислим тем же методом. В определителе Δ_1 нулевых элементов нет, поэтому можно выбрать для разложения любой из

столбцов, например, первый. В Δ_2 единственный нулевой элемент находится на пересечении первого столбца со второй строкой. Для разнообразия будем разлагать Δ_2 по второй строке:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} +$$

$$+ 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-6 - 2) - 3 \cdot (-6 - 1) + 3 \cdot (-2 + 1) =$$

$$= -16 + 21 - 3 = 2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4 - 3) - 2 \cdot (-2 + 3) = 1 - 2 = -1.$$

Таким образом, получим $\Delta = \Delta_1 + 3\Delta_2 = 2 + 3 \cdot (-1) = -1$.

Пример 4. Используя метод обращения в нуль всех, кроме одного, элементов строки (или столбца), вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Будем обращать в нуль все, кроме первого, элементы первой строки. С этой целью умножим последовательно каждый элемент первого столбца на (-2) , (-3) , (-4) и сложим с соответствующими элементами второго, третьего и четвертого столбцов. Получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2+2 & -3+3 & -4+4 \\ 2 & -4+3 & -6+4 & -8+1 \\ 3 & -6+4 & -9+1 & -12+2 \\ 4 & -8+1 & -12+2 & -16+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -7 \\ 3 & -2 & -8 & -10 \\ 4 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 10 \\ 4 & 7 & 5 & 13 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 10 \\ 7 & 5 & 13 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \\ 7 & 5 & 13 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1+1 & -7+7 \\ 1 & -1+2 & -7+5 \\ 7 & -7+5 & -49+13 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 7 & -2 & -36 \end{vmatrix} = -4 \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & -2 & 18 \end{vmatrix} = \\
&= 8 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 18 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1+1 \\ -2 & 2+18 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 20 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 20 = 160.
\end{aligned}$$

Результат получен с помощью разложения определителя по элементам первой строки и применения свойства 3.

Пример 5. Используя метод приведения к треугольному виду, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Будем получать нули выше главной диагонали.

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -7 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 0 \\ 4 & -5 & -8 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 \\ 4 & 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -18 & 0 \\ 4 & 5 & -17 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-18) \cdot 1 = -18.
\end{aligned}$$

Преобразования выполнили в следующей последовательности.

- 1) По свойству 2 поменяем местами первую и четвертую строки определителя.
- 2) Будем обращать в нуль все, кроме первого, элементы первой строки. С этой целью умножим последовательно каждый элемент первого столбца на (-2) , (-3) , (-1) и сложим с соответствующими элементами второго, третьего и четвертого столбцов.
- 3) Вынесем общие множители из второго и третьего столбцов.
- 4) По свойству 2 поменяем местами вторую и третью строки определителя.
- 5) Во второй строке и третьем столбце вместо элемента 5 получим элемент 0, умножив второй столбец на (-5) и сложив полученные элементы с соответствующими элементами третьего столбца.
- 6) Получили определитель верхней треугольной матрицы, который равен произведению элементов главной диагонали.

Пример 6. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Решение. К элементам второй строки прибавим элементы первой строки, умноженные на число $-\frac{2}{3}$. К элементам третьей строки прибавим элементы первой строки, умноженные на число (-1) . К элементам четвертой строки прибавим элементы первой строки, умноженные на число $-\frac{4}{3}$.

Получим
$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & 7 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{10}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & \frac{13}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{31}{3} \end{vmatrix}.$$

Вынесем общие множители: $\frac{5}{3}$ – из второй строки, $\frac{1}{3}$ – из четвертой строки, (-3) – из

третьей строки. Тогда
$$\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 13 & 10 & -31 \end{vmatrix}.$$

Сведем полученный определитель к определителю третьего порядка.

$$\begin{aligned} -\frac{5}{3} \cdot (-1)^{1+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 13 & 10 & -31 \end{vmatrix} &= -5 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 13 & 5 & -31 \end{vmatrix} = -10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 13 & 5 & -70 \end{vmatrix} = \\ &= -10 \cdot (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 5 & -70 \end{vmatrix} = 10 \cdot (70 + 20) = 900. \end{aligned}$$